Małgorzata Makiewicz

Środek do celu

Jak wspomagać edukację matematyczną

Fundacja

Małgorzata Makiewicz

Środek do celu

Jak wspomagać edukację matematyczną

Spis treści

Drogie Czytelniczki! Drodzy Czytelnicy!

Przed Wami kolejna – już piąta – publikacja wydana przez Fundację mBanku. Tym razem do lektury zapraszamy osoby, które zajmują się szkolną edukacją matematyczną.

„Środek do celu. Jak wspomagać edukację matematyczną" autorstwa Małgorzaty Makiewicz, to uporządkowany przegląd popularnych pomocy dydaktycznych, wykorzystywanych w polskich szkołach. To pełna cennej wiedzy i praktycznych wskazówek podróż po świecie tangramów, geoplanów, klocków, kart czy ozobotów. Znajdziecie tu opisy poszczególnych pomocy, ich zastosowanie w konkretnej grupie wiekowej uczniów oraz przydatność w nauce wybranych zagadnień matematycznych.

Książka powstała, żeby pokazać, jak mądrze i efektywnie korzystać z pomocy dydaktycznych. Bo nie jest sztuką mieć świetnie wyposażoną pracownię matematyczną. Sztuką jest wykorzystywać pomoce tak, aby lekcje matematyki były pasjonującym, angażującym odkrywaniem świata liczb i figur. Tymczasem w szkole dominują podręczniki i zeszyty do rozwiązywania zadań, a od uczniów wymaga się przede wszystkim pamięciowego opanowywania wiedzy. Matematyka staje się obcą, trudną i abstrakcyjną dziedziną nauki. A przecież jest pełna fascynujących zagadek i ciekawych wyzwań! Rolą osób zajmujących się edukacją matematyczną jest przekonać o tym uczniów. Parafrazując Małgorzatę Makiewicz, abstrakcyjne pojęcia trzeba przenieść w bardziej realny wymiar i stworzyć możliwość ich dotknięcia, złamania, przekrojenia i ułożenia.

W mFundacji hołdujemy zasadzie, że „matematyka jest wszędzie", a naszą misją jest inspirować do jej odkrywania. Chcemy zachęcać do angażujących i nowatorskich metod nauczania i sięgania po pomoce, które to nauczanie urozmaicą. Od 2014 r. zajmujemy się popularyzacją wiedzy matematycznej i finansowym wspieraniem wartościowych projektów edukacyjnych z tej dziedziny nauki. Wierzymy, że publikacja „Środek do celu. Jak wspomagać edukację matematyczną" dostarczy Wam wielu inspiracji do prowadzenia lekcji matematyki, na które Wasze uczennice i Wasi uczniowie będą czekać z niecierpliwością.

mFundacja

Życzymy miłej lektury!
zespół mFundacji

Wstęp

Często podczas egzaminu z dydaktyki matematyki słyszę od studentów, że zadaniem środków dydaktycznych jest urozmaicenie lekcji i zaciekawienie uczniów. To prawda, ale pomoce naukowe stosujemy przede wszystkim w celu wspomagania dziecięcego myślenia oraz pokonania dystansu pomiędzy poznaniem zmysłowym a matematyczną abstrakcją. O taką właśnie pomoc chodzi. Niektórzy zapominają, że uczniowie to nie *mali dorośli*, że w przedszkolu ani w młodszych klasach nie da się rozumować na poziomie hipotetyczno-dedukcyjnym. Aby zrozumieć i *oswoić* pojęcie matematyczne, aby właściwie zbudować zalążki tych pojęć, trzeba najpierw w sposób fizyczny poznać ich reprezentacje. Dotknąć, złamać, przekroić, ułożyć, zbudować model. W życiu i w świecie nie ma przecież idealnych kwadratów, kół czy sześcianów. Nawet błyskawica, jak mawiał sam Benoit Mandelbrot, nie przemieszcza się po linii prostej.

Książka „Środek do celu. Jak wspomagać edukację matematyczną” przeznaczona jest dla nauczycieli, studentów i innych osób zajmujących się szkolną edukacją matematyczną. Zawiera opisy wybranych środków dydaktycznych popularnie stosowanych w polskich szkołach, a także propozycje samodzielnego wykonania niewielkim kosztem niektórych z nich. W wielu szkołach dominuje niestety transmisyjny model nauczania. Zadaniem tego skryptu jest również zarysowanie alternatywnego modelu aktywizującego oraz przedstawienie nowoczesnej perspektywy edukacyjnej, w myśl której szczególną wartością nie jest posiadanie, lecz umiejętne stosowanie środków dydaktycznych.

Przygotowując tę publikację, opierałam się na swojej wieloletniej praktyce nauczycielskiej oraz na rezultatach prowadzonych przeze mnie badań pedagogicznych. Zasięgałam opinii nauczycieli – praktyków edukacji matematycznej na wszystkich poziomach nauczania. Wybierając przykłady środków dydaktycznych, brałam pod uwagę to, że nie wszyscy mamy możliwość zakupienia drogich urządzeń multimedialnych. Chciałam przedstawić nowoczesną funkcjonalność niektórych przyborów, jak na przykład wyciągniętego z magazynu czy piwnicy szkolnej rzutnika pisma, który często uważany jest za relikt poprzedniej epoki.

Szukając środków dydaktycznych, które urozmaicą lekcje matematyki, nie zapominajmy o dobrej tablicy. Dla wielu nauczycieli jest ona *sceną lekcyjnego spektaklu*. Zwróćmy uwagę na różnicę pomiędzy przedstawianiem wcześniej przygotowanej, perfekcyjnej z konstrukcji geometrycznej (ekran po ekranie, slajd po slajdzie), a tworzeniem tej struktury na tablicy, na oczach uczniów. Z namysłem, zastanawianiem się, poprawianiem czy modyfikowaniem. Uczeń widzi wtedy proces przeprowadzenia dowodu, trud rozwiązania zadania, a nie algorytm, który ma być przez niego wykonany. Poza tym, zapisywanie i rysowanie na tablicy daje uczniom czas niezbędny do przetworzenia informacji.

Życzę inspirującej lektury,
Małgorzata Makiewicz

Legenda

Wiele środków dydaktycznych ma charakter uniwersalny, inne są odpowiednie do poszczególnych poziomów nauczania. Dla wygody, przy omawianiu poszczególnych środków, w publikacji zastosowałam następujący podział:

WP i 1-3	4-6	7-8	SPP	U
Wychowanie przedszkolne i edukacja wczesnoszkolna	Klasy 4-6 szkoły podstawowej	Klasy 7-8 szkoły podstawowej	Szkoły ponadpodstawowe	Środek uniwersalny

Dodatkowo, każdy ze środków dydaktycznych ma przyporządkowany znacznik funkcjonalny, gdzie:

S	R	K	W
to symulacja	to biegłość rachunkowa	to rozwijanie myślenia krytycznego	to wzorzec do naśladowania
Z	**P**	**T**	**O**
to zapamiętanie treści	to poznawanie nowych pojęć	to ilustracja twierdzeń	to rozwijanie oryginalnych pomysłów i rozwiązań, kreatywność

Środki dydaktyczne w edukacji matematycznej

Edukacja matematyczna polega przede wszystkim na konstruowaniu w umyśle ucznia pojęć, badaniu ich własności oraz dostrzeganiu związków zachodzących pomiędzy nimi, formułowaniu i uzasadnianiu twierdzeń. Problem w tym, że wszelkie obiekty matematyczne należą do świata abstrakcji. Pojęć matematycznych nie można dotknąć, posmakować ani pokazać. Przedmioty materialne stanowią, lepsze lub gorsze, reprezentacje pojęć matematycznych. Za pomocą zmysłów możemy przybliżyć się do idei, zespołu cech wspólnych tych reprezentacji.

W matematyce posługujemy się głównie reprezentacjami symbolicznymi. Ale rozumowanie przedszkolaka[1], ucznia szkoły podstawowej, a czasami również ponadpodstawowej, dzieli przepaść od rozumowania hipotetyczno-dedukcyjnego, opartego na operacjach formalnych i wyrażanych symbolicznie. Dlatego rozumne stosowanie **pomocy dydaktycznych** staje się **środkiem do celu**, jakim jest pomoc uczniowi w pokonaniu trudności dobrego zrozumienia pojęć matematycznych, dostrzegania związków, uzasadniania stwierdzeń na drodze stopniowego rozwoju poznawczego[2] od stadium przedoperacyjnego (2–6 rok życia) przez kształtowanie się operacji konkretnych (6–12 rok życia) do poziomu operacji formalnych w okresie dorastania. Jerome Bruner w *Kulturze edukacji* stwierdza, że dokonywanie reprezentacji świata za pomocą określonych procedur (działania, umysłowych obrazów i symboli) przebiega zgodnie z zasadą, że *im dojrzalsza jednostka, tym bardziej prawdopodobne, że będzie* preferować reprezentację symboliczną[3]. Wskazuje jednocześnie szczególną rolę, równorzędny, komplementarny charakter reprezentacji enaktywnych[4], ikonicznych i symbolicznych. Bo na poszczególnych etapach kształcenia matematycznego nie sposób pominąć tzw. trybu proceduralnego, związanego z doświadczeniem, manipulacją, ruchem, ani trybu reprezentacji obrazowej, której Bruner przypisuje ważną rolę *utrwalania specyfiki zdarzeń i przedmiotów, inicjowania prototypów klas zdarzeń oraz rekonstrukcji klas poznawczych nawet na poziomie przedoperacyjnym*[5].

Zrób to sam

Różnicę pomiędzy motorycznym a umysłowym rozwiązaniem matematycznych problemów można dostrzec np. podczas omawiania zagadnienia wyznaczania środka ciężkości trójkąta. Czymś innym jest przeprowadzenie dowodu twierdzenia o środkowych trójkąta,

1 Przykład: *Małe dziecko ma przed sobą worek z klockami. Wkłada ręce do worka i dotyka schowanych tam figur. Widzę, jak mruży oczy, jakby chciało odseparować wrażenia wzrokowe i za pomocą dotyku (tylko) odgadnąć, jaką figurę trzyma w dłoniach.*

2 J. Piaget, B. Inhelder, *Obrazy umysłowe, W: Inteligencja,* P. Oleron, J. Piaget, B. Inhelder, P. Greco, PWN, Warszawa 1967, s. 95–96.

3 J. Bruner, *Kultura edukacji,* przeł. T. Brzostowska-Tereszkiewicz, Universitas, Kraków 2010, s. 214–216.

4 J. Bruner, *Poza dostarczone informacje,* PWN, Warszawa 1978, s. 534.

5 Tamże

a czymś innym doświadczalne wyznaczenie *środka ciężkości w trójkącie wyciętym z papieru za pomocą zginania kartki wzdłuż środkowych*[6] (fot. 1).

Nawet zwykła kartka papieru, z której wycinamy trójkąt, może stać się niezwykle istotną pomocą dydaktyczną, środkiem umożliwiającym uczniowi zrozumienie istoty pojęcia, jego konstrukcji oraz znaczenia.

Możliwość samodzielnego zrobienia konstrukcji polegającej na zgięciu trójkątnej kartki wzdłuż odcinka łączącego poszczególne wierzchołki ze środkami przeciwległych boków pozostaje w pamięci jako ślad wykonanych czynności, a możliwość fizycznej weryfikacji punktu podparcia trójkąta (fot. 2) pobudza pozytywne emocje.

Fot. 1 Środkowe w trójkącie.
Konstrukcja zginania papieru

4-6 | 7-8 | SPP | T

Fot. 2 Środek ciężkości w trójkącie

4-6 | 7-8 | SPP | T

Pod pojęciem środków dydaktycznych rozumiemy wszelkiego rodzaju przedmioty oddziałujące na zmysły uczniów. Ich zadaniem jest między innymi ułatwienie i przyśpieszenie poznawania rzeczywistości. Zastosowanie ich w procesie nauczania matematyki umożliwia efektywną realizację podstawowych zasad dydaktycznych: przystępności, poglądowości, aktywnego udziału ucznia w procesie nauczania i innych.

Stosowanie środków dydaktycznych

- Przyswajanie wiedzy i kształtowanie pojęć (np. ciąg, funkcja, trójkąt, miejsce zerowe)
- Nabywanie i kształcenie umiejętności (np. obliczania największego wspólnego dzielnika, wyznaczania środka okręgu wpisanego w trójkąt, wyznaczania symetralnej odcinka, dodawania ułamków)
- Rozwój wyobraźni, myślenia abstrakcyjnego i wdrażanie do aktywności (samodzielne działania, podejmowanie decyzji i krytyczne wyciąganie wniosków)
- Urozmaicenie zajęć i zachęta do aktywności wszystkich uczniów[7]

6 M. Makiewicz, *Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej – badania w działaniu,* SKNMDM, Szczecin 2018, s. 4.

7 M. Makiewicz, *Dydaktyka matematyki – praktyki studenckie*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2006, s.36.

Różne sposoby, jeden cel

Tradycyjny podział środków dydaktycznych na wzrokowe (rysunki, anaglify, fotografie, foliogramy, fazogramy, plansze itp.), słuchowe (nagrania audio, instrumenty muzyczne do prezentowania rytmu), dotykowe (klocki, patyczki, geoplany, układanki, puzzle) traci już swój pierwotny sens. Coraz częściej mamy do czynienia z multimedialnym oddziaływaniem łączącym kilka dróg (kanałów) sensorycznych w postaci apletów, programów komputerowych, prezentacji multimedialnych czy elektronicznych gier dydaktycznych. Dlatego podejmując się klasyfikacji, skoncentruję się na funkcjach i zakładanych celach.

Środki dydaktyczne mogą pełnić funkcję:

- **Informacyjną i źródłową** (podawanie wiadomości w sposób uporządkowany i przejrzysty),
- **Ilustratywną** (wzbogacanie treści, uzupełnianie obserwacji),
- **Badawczą** (problemowe formułowanie zagadnień, stawianie hipotez, wyciąganie wniosków, twórcze rozwiązywanie problemów),
- **Ćwiczeniową** (kształcenie umiejętności rozwiązywania zadań, konstruowania, opanowania umiejętności i nawyków),
- **Motywacyjną** (rozbudzanie ciekawości i zainteresowań, zainteresowanie przedmiotem),
- **Kontrolną i korektywną** (sprawdzanie i utrwalanie wiedzy uczniów, wskazywanie poprawnych odpowiedzi, błędów, sprawdzenie stopnia opanowania wiedzy),
- **Samokształceniową** (kierunkowanie pracy samodzielnej, indywidualizacja),
- **Aktywizującą** (zapewnianie aktywnego udziału uczniów w lekcji)[8].

Przykładami środków dydaktycznych **ułatwiających proces poznania pojęcia** może być zestaw do demonstracji figur obrotowych lub koło garncarskie, model interaktywny „objętość ostrosłupa” lub program komputerowy kreślący wykresy funkcji logarytmicznej i wykładniczej umożliwiający odbijanie wykresu względem prostej o równaniu y=x. Ten sam zestaw może służyć również do rozbudzania ciekawości poznawczej, przewidywania i weryfikowania hipotez.

Funkcja środka dydaktycznego zależy bezpośrednio od sytuacji dydaktycznej, w jakiej jest stosowany i wręcz od treści wypowiadanych przez nauczyciela słów: „obracająca się ramka prostokątna utworzy kształt walca”, „jak ci się wydaje, jaki kształt możemy otrzymać w wyniku obracającej się ramki prostokątnej?”. Przy tak sformułowanym pytaniu (choć przecież mamy ten sam środek dydaktyczny) uczeń uaktywnia się i zadaje pytania: „a względem czego będziemy obracać? Dłuższego czy krótszego boku? A może względem przekątnej tego prostokąta?”. Sądzę, że tak prowadzona rozmowa wspomaga trening wyobraźni przestrzennej.

8 Tamże, s. 37.

Przykłady środków dydaktycznych:

Pomoce **wspomagające zapamiętywanie informacji**

- Tablice (np. tablica liczb pierwszych)
- Plansze (np. wzory redukcyjne)
- Karty do gry
- Puzzle
- Piłka do ćwiczeń tabliczki mnożenia

Pomoce **wspierające proces odkrywania, kodowania i programowania**

- Waga szalkowa
- Klocki (np. kolorowe liczby lub klocki Dienesa)
- Ozoboty
- Programy komputerowe
- Zestawy ilustrujące twierdzenie o sumie kątów w trójkącie lub o kącie wpisanym i środkowym

Pomoce **symulujące doświadczenie, proces rzeczywisty**

- Zegar analogowy i cyfrowy
- Kostka do gry
- Deska Galtona

Pomoce **ułatwiające statystyczną analizę danych**

- Arkusz kalkulacyjny

Pomoce–wzory **do naśladowania**

- Spoty dydaktyczne (np. jak wykreślić symetralną odcinka czy dwusieczną kąta)
- Plansze (np. z algorytmem obliczania NWD)

Zastosowanie nawet najdoskonalszych, najbardziej nowoczesnych środków dydaktycznych nie zmienia charakteru i własności poznawanych pojęć. Jednak w praktyce szkolnej pojęcia matematyczne kształtują się nie tylko przez formułowanie określeń i definiowanie, ale głównie przez sposób ich używania. Stosowanie środków dydaktycznych na zajęciach z matematyki na wszystkich poziomach nauczania jest ściśle związane z zasadą poglądowości.

Zarówno w transmisyjnym, jak również aktywizującym modelu nauczania preferowane jest poznanie wielozmysłowe, które spełnia funkcje:

- uogólniania myślenia (od szczegółu do ogółu),
- wyjaśniania uogólnień za pomocą konkretów,
- sprawdzania ukształtowanych już praw i pojęć[9].

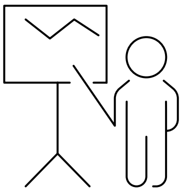
Poznanie wielozmysłowe w modelu transmisyjnym wspomaga efektywność przekazu treści nauczania, w modelu aktywizującym – wspomaga rozwój poznawczy ucznia. Środki dydaktyczne spełniają w tych modelach odmienne role.

9 K. Sośnicki, *Dydaktyka ogólna*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1959.

Rola środków dydaktycznych

Transmisyjny model nauczania

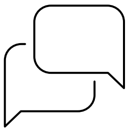
przyśpieszają, urozmaicają przekaz



Przykład: plansza dydaktyczna z gotowymi wzorami na pola wielokątów

Aktywizujący model nauczania

pobudzają ucznia do samodzielnej pracy i konstruowania wiedzy



Przykład: Plansza dydaktyczna z kolejnymi krokami wyprowadzenia wzoru

We wczesnej edukacji szkolnej szczególną rolę odgrywają wszelkiego rodzaju klocki, karty i układanki (fot. 3–4). Służą one przede wszystkim do pośredniczenia pomiędzy poznaniem zmysłowym a intelektualnym. Łączą dziecięcą zabawę z nauką posługiwania się liczbami (określaniem liczebności zbiorów, numerowaniem, rozpoznawaniem i identyfikowaniem liczb zapisanych w różny sposób).

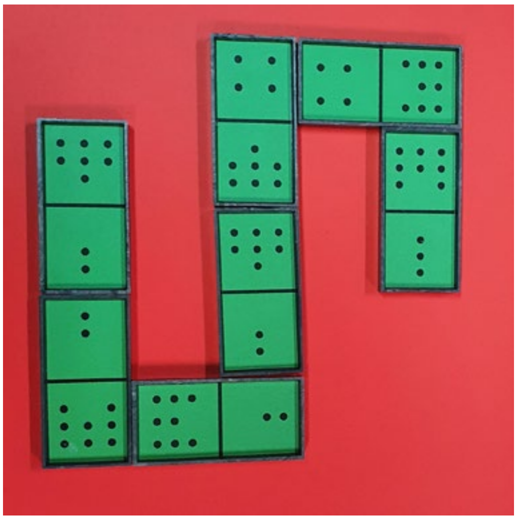
Fot. 3 Karty tradycyjne do nauki liczenia, klasyfikowania i porządkowania elementów

WP i 1-3 | 4-6 | R | S | K | Z

Fot. 4 Domino obrazkowe do nauki liczenia

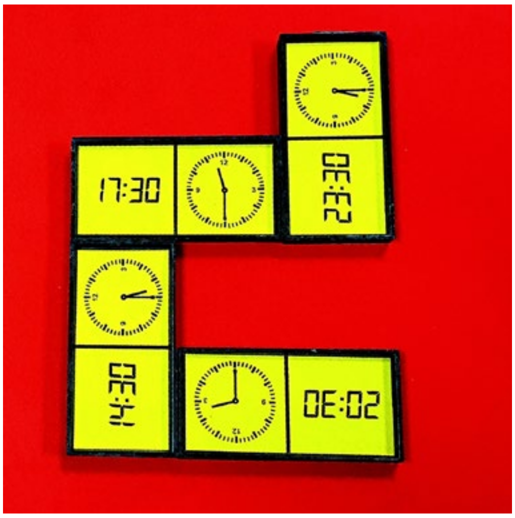
WP i 1-3 | 4-6 | R | S | K | Z

Zestawy domino wykorzystywane są m.in.: do utrwalania liczenia (fot. 5), wspomagania obliczeń zegarowych i rozpoznawania analogowego i cyfrowego zapisu czasu (fot. 6). Można je wykonać samodzielnie do dowolnych treści programowych z prostokątnych (dwukwadratowych) tekturek o jednakowych wymiarach.



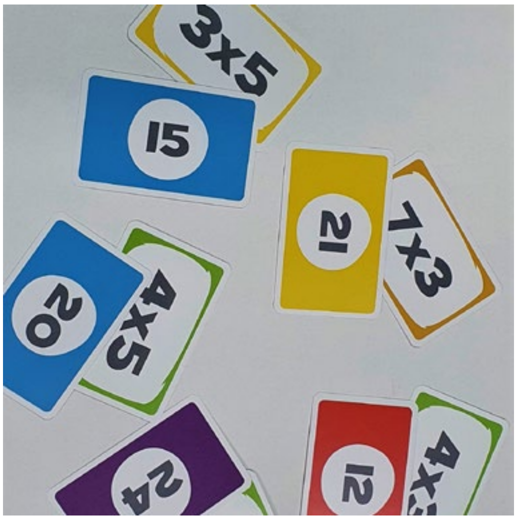
Fot. 5 Domino liczbowe z przekroczeniem 6

WP i 1-3 | 4-6 | R | S | K | Z



Fot. 6 Domino zegarowe

WP i 1-3 | 4-6 | R | S | K | Z



Fot. 7 Karty do wspomagania mnożenia

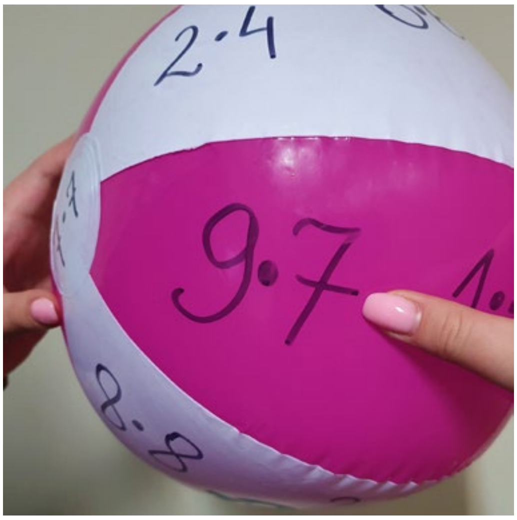
WP i 1-3 | 4-6 | R | Z | K

Do pomagania w kształceniu biegłości w wykonywaniu podstawowych działań arytmetycznych służą różnego typu karty (fot. 7), gry lub pomoce wykonane samodzielnie przez nauczycieli.

Zrób to sam

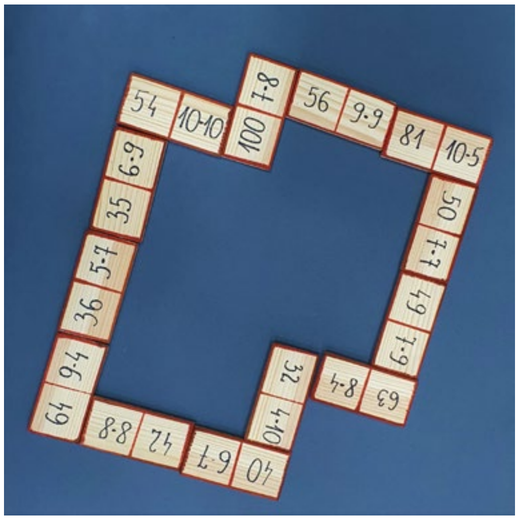
Do moich ulubionych, wykonanych niewielkim kosztem, środków dydaktycznych wspomagających stałe powtórki z tabliczki mnożenia należy „piłka mnożenia" (fot. 8). Do jej zrobienia wystarczy dowolna dmuchana piłka plażowa (najlepiej nie za duża) oraz pisak permanentny. Na powierzchni piłki zapisujemy działania, które chcemy utrwalać. Uczniowie rzucają do siebie piłkę (można stanąć lub usiąść w kole). Działanie najbliższe prawego kciuka to pytanie. Dziecko podaje poprawny wynik i natychmiast rzuca piłkę do koleżanki lub kolegi itd. Najpierw nauczyciel tłumaczy, pokazuje, jak odczytać działanie, potem uczestnicy łączą zabawę (coraz szybsze rzucanie i odbieranie piłki) z treningiem tabliczki mnożenia. Znam nauczycieli, którzy każdą lekcję rozpoczynają od rozgrzewki – treningu pamięciowego i osiągają dzięki temu bardzo dobre wyniki nauczania.

Podobnie, w treningu pamięciowym tabliczki mnożenia dobrze sprawdza się samodzielnie wykonane domino mnożenia (fot. 9).



Fot. 8 Piłka mnożenia
– demonstracja nauczyciela zasad gry

WP i 1-3 | 4-6 | R | Z | K



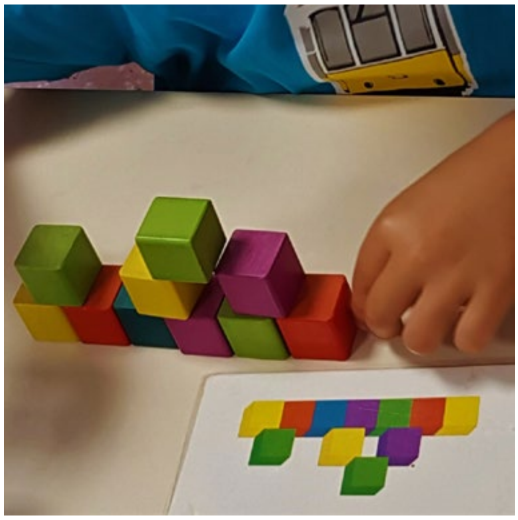
Fot. 9 Układanka domino
– tabliczka mnożenia

WP i 1-3 | 4-6 | R | Z | K

Rozwijaniu koordynacji wzrokowo-ruchowej, kształceniu orientacji przestrzennej, nauki rozpoznawania i sprawdzania równoliczności zbiorów, kształtowaniu intuicji geometrycznych figur płaskich i przestrzennych czy umiejętności klasyfikowania i porządkowania elementów służą różnego typu klocki (fot. 10–11).

Fot. 10 Klocki do budowania
wielościanów

WP i 1-3 | 4-6 | 7-8 | R | P | K



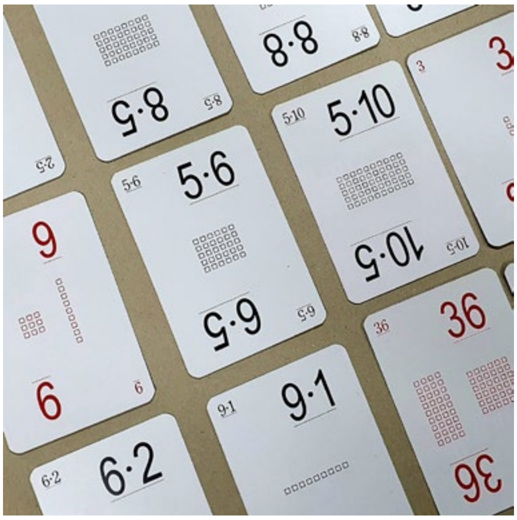
Fot. 11 Dziecko odtwarzające układ klocków
sześciennych na podstawie obrazka na kartoniku

WP i 1-3 | 4-6 | W | K

W kolejnych rozdziałach omówimy szczegółowo wybrane środki dydaktyczne.

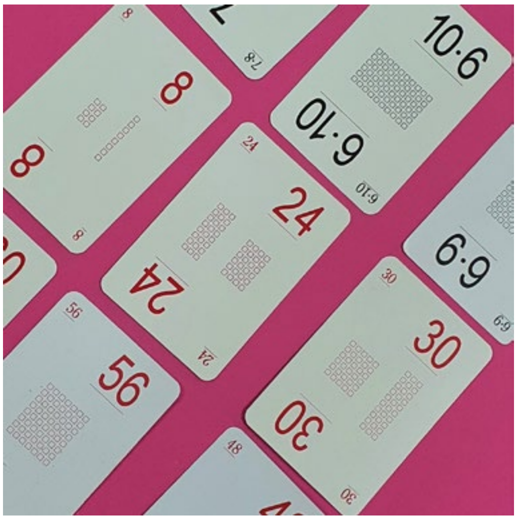
Gry i karty edukacyjne

W kształtowaniu biegłości poprawnego rachowania, czyli wykonywania działań arytmetycznych, przydają się różnego typu gry, karty, układanki. Przykładowo: do pokonania trudności w nauce tabliczki mnożenia stosujemy m.in. karty edukacyjne (fot. 12–13), które nie tylko wspomagają rachunek pamięciowy, ale również wprowadzają, na zasadzie spirali edukacyjnej, pojęcie rozkładu liczby na czynniki. Ułatwiają uczniom spostrzeganie, że ta sama liczba może przedstawiać iloczyn innych czynników, np. 36 jest zarówno iloczynem 4 i 9, jak również 6 i 6 (fot. 12), a liczba 24 przedstawiona jest z jednej strony jako układ ośmiu rzędów po trzy kolumny, z drugiej sześciu rzędów po cztery (fot. 13).



Fot. 12 Karty Grabowskiego do nauki tabliczki mnożenia I

WP i 1-3 | 4-6 | K | R

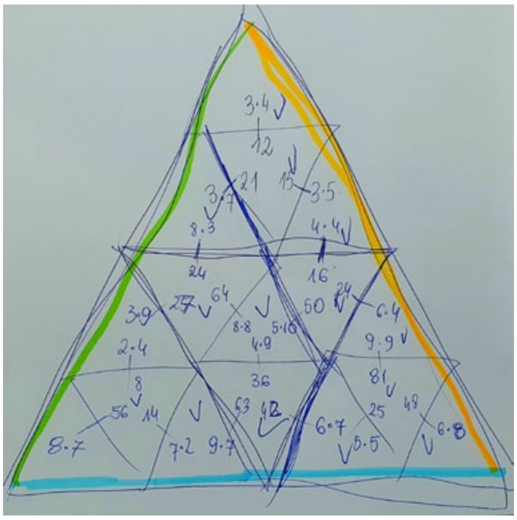


Fot. 13 Karty Grabowskiego do nauki tabliczki mnożenia II

WP i 1-3 | 4-6 | K | R

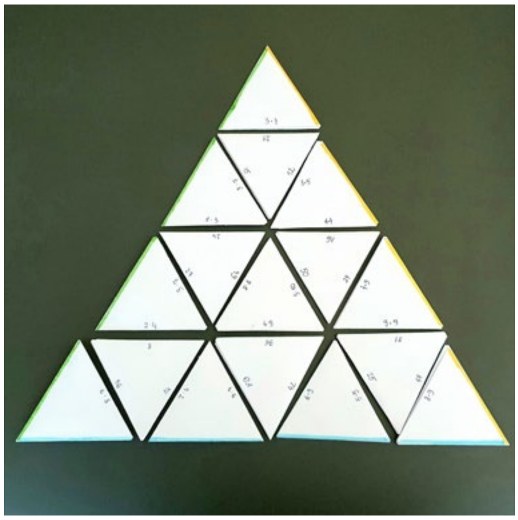
Zrób to sam

Dla osób, które nie mają wyżej przedstawionych środków dydaktycznych proponuję samodzielne wykonanie uniwersalnej **piramidy rachunkowej** (fot. 15). Omówię sposób jej wykonania i podam przykład opisu dotyczący tabliczki mnożenia, chociaż może ona służyć na wszystkich poziomach nauczania i do trenowania, np. rozumienia logarytmów, wzorów skróconego mnożenia czy wzorów pochodnych funkcji. Proces przygotowania piramidy składa się z dwóch części: koncepcyjnej i technicznej. Pomysł na poszczególne działania najlepiej rozrysować na większej kartce w taki sposób, aby wyniki były jednoznaczne. W stosunku do każdego elementu można posłużyć się strukturalizacją barwną. Można również kolorami oznaczyć jedynie te boki małych trójkątów, które stanowić będą fragment boku piramidy (fot. 14).



Fot. 14 Szkic odręczny wykonania piramidy do ćwiczeń tabliczki mnożenia

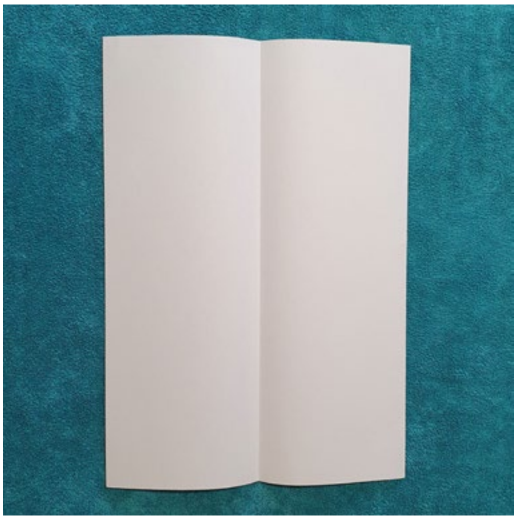
U R



Fot. 15 Gotowy, wykonany samodzielnie model piramidy do ćwiczeń tabliczki mnożenia

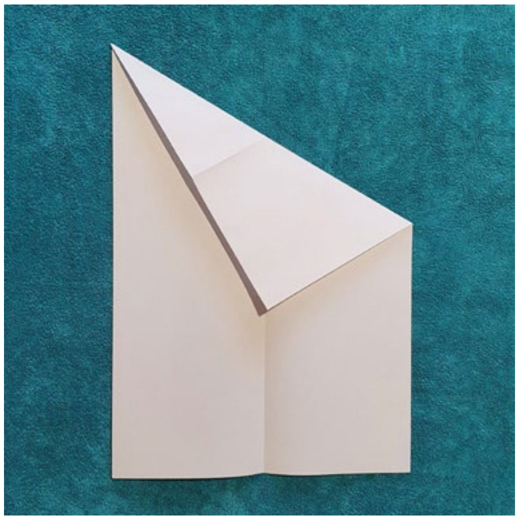
U R

Do wykonania uniwersalnej piramidy potrzeba 16 przystających trójkątów równobocznych. Nie trzeba ich kupować, przedstawię sposób wykonania ich tylko z kartek formatu A4. Sposób jest na tyle prosty, że z powodzeniem radzą sobie z nim przedszkolaki. Kartkę A4 zginamy na pół (fot. 16), a następnie górny prawy wierzchołek prostokąta kładziemy na powstałej linii zgięcia (fot. 17).



Fot. 16 Instrukcja składania trójkąta równobocznego I

U W P



Fot. 17 Instrukcja składania trójkąta równobocznego II

U W P

Kolejny krok to zgięcie kartki tak, aby dolny prawy wierzchołek dotknął ostatniej linii zgięcia (fot. 18). Następny ruch (czwarty) to zagięcie wystającego z lewej strony trójkącika do środka. Uzyskamy wtedy duży trójkąt równoboczny. Po jednej z jego stron widzimy równoległy do podstawy ślad zgięcia (fot. 19).

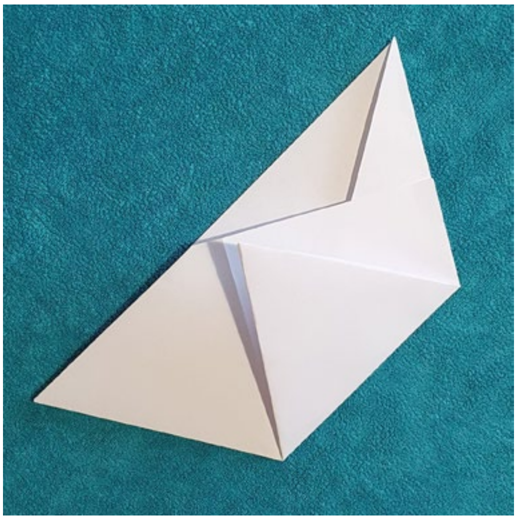
Fot. 18 Instrukcja składania trójkąta równobocznego III

U W P

Fot. 19 Instrukcja składania trójkąta równobocznego IV

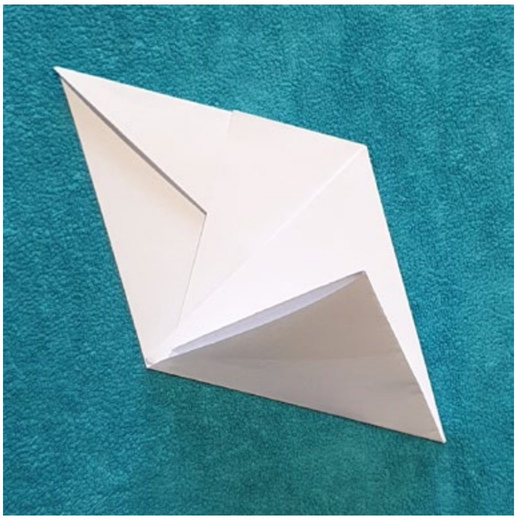
U W P

Po zgięciu dużego trójkąta równobocznego wzdłuż tego śladu otrzymujemy trapez równoramienny (fot. 20), a następnie, po zagięciu do wewnątrz małego trójkąta równobocznego, romb (fot. 21).



Fot. 20 Instrukcja składania trójkąta równobocznego V

U W P



Fot. 21 Instrukcja składania trójkąta równobocznego VI

U W P

Zginając na pół otrzymany romb wzdłuż jego krótszej przekątnej, otrzymujemy mały, podręczny trójkąt równoboczny (fot. 22), który wykorzystamy przy przygotowaniu piramidy liczbowej, ale również przy rozwiązywaniu różnych zadań. Warto zwrócić uwagę na to, że konstrukcja ta jest bardzo prosta i po kilku minutach pracy dzieci możemy uzyskać kilkanaście lub kilkadziesiąt identycznych trójkątów.

Fot. 22 Trójkąt równoboczny uzyskany techniką zginania kartki papieru

U W P

Miejsce na notatki..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

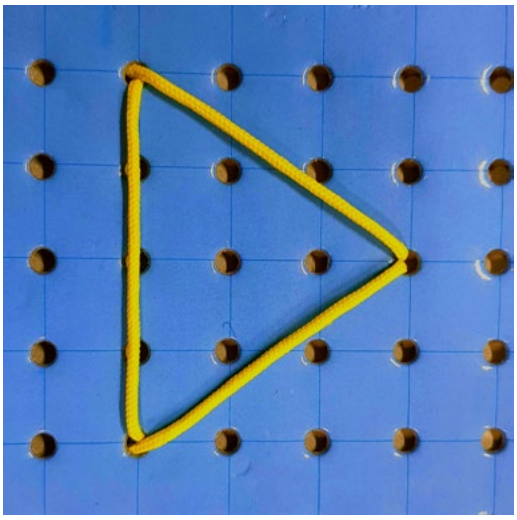
....

....

....

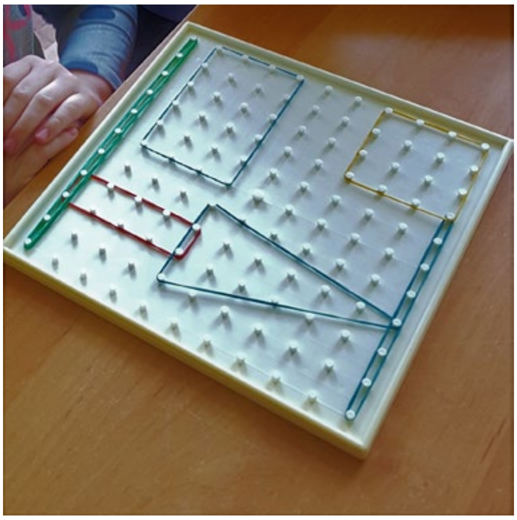
Geoplany

Geoplany to bardzo praktyczne, łatwe do wykonania tablice z otworkami (fot. 23) do przeplatania sznurka lub wypustkami (fot. 24–25) w punktach siatki, na których zaczepia się tasiemki lub gumki recepturki.



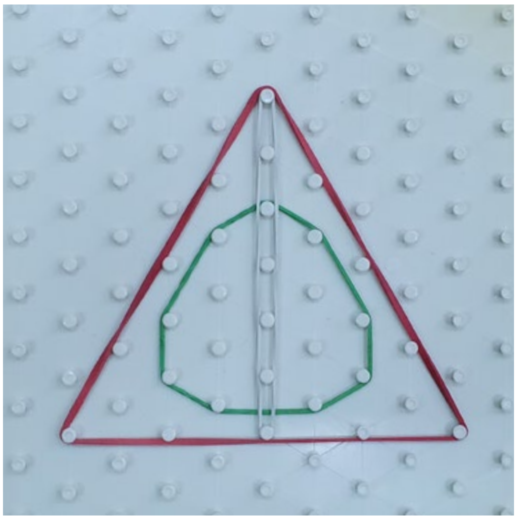
Fot. 23 Geoplan z otworkami

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W



Fot. 24 Geoplan indywidualny na bazie sieci kwadratowej

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W

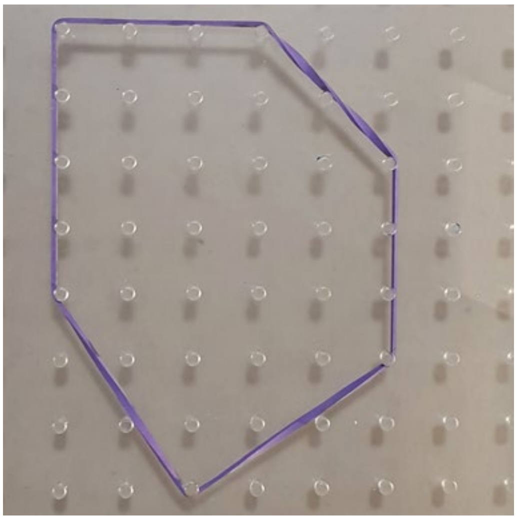


Fot. 25 Geoplan indywidualny na bazie sieci trójkątnej

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W

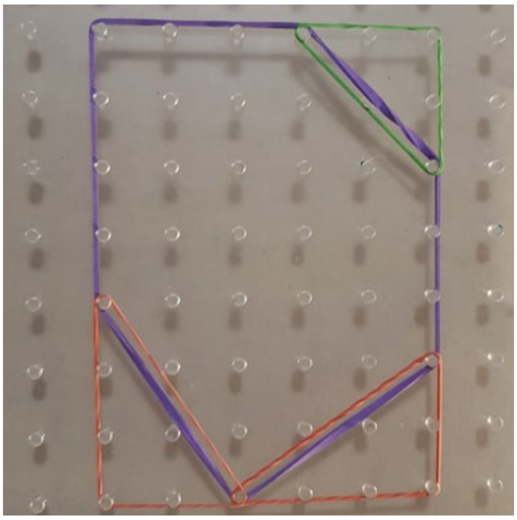
Spotyka się geoplany z siecią trójkątów równobocznych (fot. 23), ale najczęściej stosuje się sieć kwadratową, która w naturalny sposób przygotowuje ucznia do właściwej orientacji w układzie współrzędnych prostokątnych. Wyróżniamy geoplany demonstracyjne (tablice do zawieszenia na ścianie) lub osobiste. Na wczesnych etapach kształcenia geoplany doskonale nadają się do poznawania i nazywania figur płaskich czy do rozwijania wyobraźni.

Na geoplanach najczęściej zaznaczamy omawiane figury. Na przykład fot. 24 przedstawia dziecięcy obrazek, na którym drzewo, słońce, dom, trawnik i niebo zostały zaznaczone za pomocą trójkąta i prostokątów. Fot. 25 przedstawia motyw osiowosymetryczny, zaś fot. 26 – sześciokąt wypukły. Uczeń, chcąc obliczyć pole tego sześciokąta, dokonuje prób podziału na poznane wcześniej figury albo uzupełnia sześciokąt do większego prostokąta (fot. 27). Obliczenie pola staje się bardzo proste: wystarczy od pola „dużego” prostokąta wynoszącego 35 odjąć 2 pola prostokątnych trójkątów o przyprostokątnych 2 i 3 zaznaczonych gumką pomarańczową oraz pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 i 2 zaznaczonego gumką zieloną (fot. 27).



Fot. 26 Sześciokąt zaznaczony na geoplanie

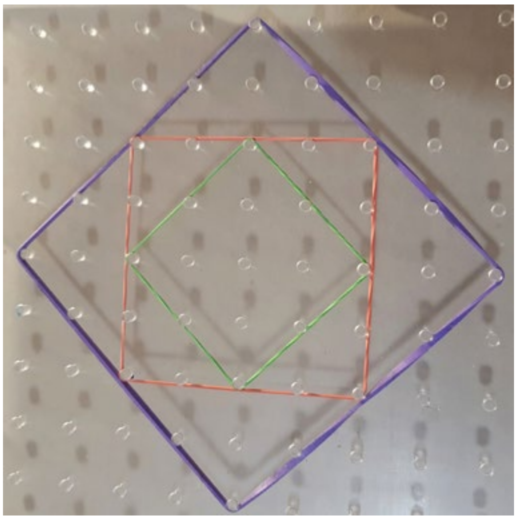
WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W



Fot. 27 Dopełnienie sześciokąta do prostokąta na geoplanie

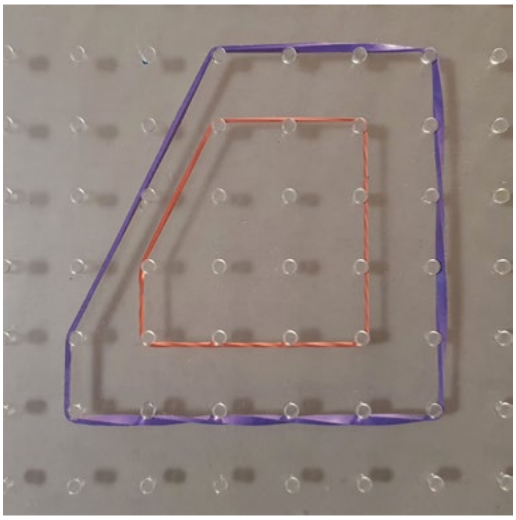
WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W

W starszych klasach geoplany nadają się do projektowania prostych fraktali (fot. 28) lub do obliczania pól wielokątów za pomocą twierdzenia Picka (fot. 29). Do tych obliczeń wystarczy umiejętność liczenia punktów kratowych wewnątrz wielokąta i na jego krawędzi oraz zastosowanie nieskomplikowanego wzoru.



Fot. 28 Ciąg trzech kwadratów zaznaczonych na geoplanie

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W

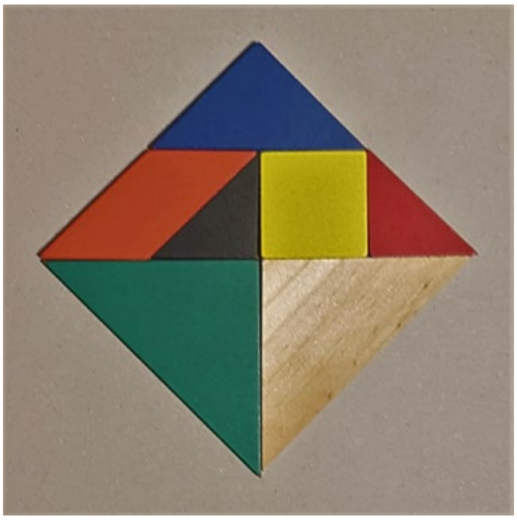


Fot. 29 Obliczanie pola wielokąta za pomocą wzoru Picka

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W

Tangramy

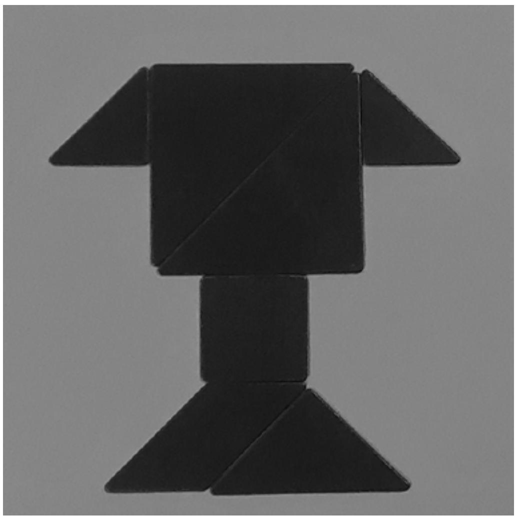
Znana od trzech tysięcy lat chińska układanka zwana tangramem nieustannie cieszy się wielką popularnością i z powodzeniem może być stosowana w kształceniu poprawnego posługiwania się figurami płaskimi oraz do rozbudzania twórczości i pomysłowości uczniów. Tangram to zestaw siedmiu płaskich klocków wykonanych ze sklejki drewnianej (fot. 30), pleksi, kartonu, papieru, grubszej folii, pianki modelarskiej, filcu, arkusza gąbki itp. Klocki (tany) układają się w kwadrat. Są to: trójkąty prostokątne równoramienne (dwa duże, jeden średni i dwa małe), kwadrat i równoległobok. Boki poszczególnych klocków mają tak dobrane długości, że układają się w kwadrat. Jego bok wyznaczony jest przez przeciwprostokątną największego trójkąta, a przekątna jest cztery razy dłuższa od boku małego kwadratu.



Fot. 30 Tangram drewniany

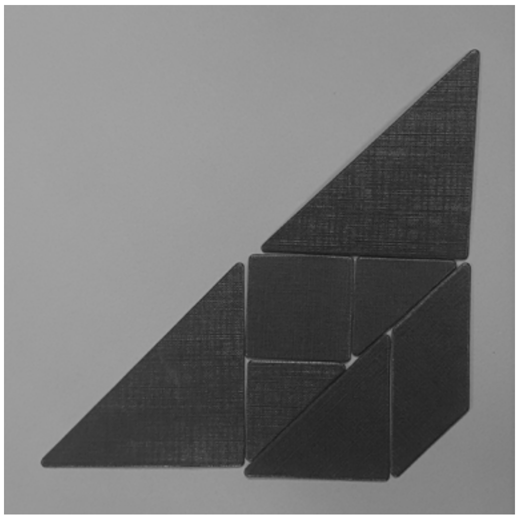
WP i 1-3 | 4-6 | 7-8 | T | P | K | W

Poszczególne tany mają jednakowy kolor (fot. 31–33), co sprawia, że układanki są trudniejsze, lub są wielobarwne (fot. 30). Za pomocą tangramów można układać litery, cyfry, figury geometryczne, proste obrazki, postaci zwierząt i ludzi, rośliny. Dzieci chętnie układają ilustracje do opowiadań, wierszy. Można również spotkać tangramy wirtualne – aplikacje na smartfon lub komputer symulujące tradycyjną układankę. Ułożenie motywu polega wtedy na wirtualnym przemieszczaniu obrazków na ekranie urządzenia (fot. 34).



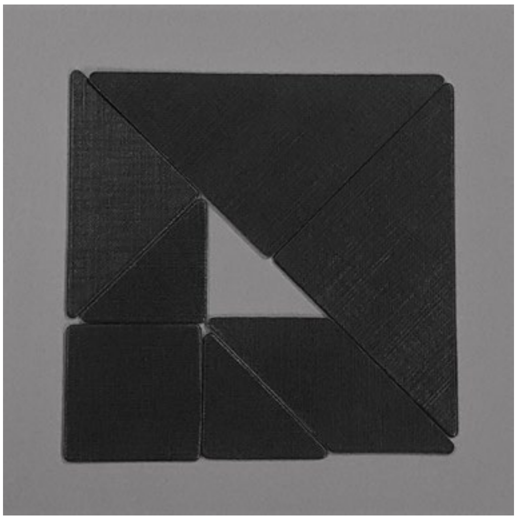
Fot. 31 Tangram jednobarwny I

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W



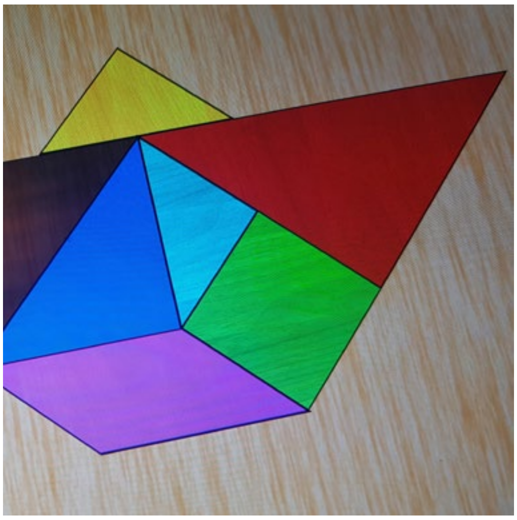
Fot. 32 Tangram jednobarwny II

WP i 1-3 | 4-6 | P | K | W



Fot. 33 Tangram jednobarwny III

WP i 1-3 | 4-6 | T | P | K | W



Fot. 34 Tangram wirtualny – aplikacja na smartfona

4-6 | 7-8 | SPP | P | K | W

Każdy układany motyw powinien składać się ze wszystkich tanów. Dwa tany nie powinny na siebie nachodzić. Nauczyciele wykorzystują tangramy do nauki ułamków właściwych (jeśli pole dużego kwadratu wynosi 1, to pola poszczególnych tanów wyrażają 1/4, 1/8 lub 1/16). Tangramy dobrze sprawdzają się w edukacji wczesnoszkolnej i przedszkolnej, ale również przydają się w klasach starszych. Przykładem zastosowania dwóch kompletów tangramów w klasie ósmej może być ilustracja twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego równoramiennego (fot. 35).

Fot. 35 Dwa tangramy ilustrujące twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta równoramiennego

4-6 | 7-8 | SPP | T | P | K | W

Miejsce na notatki..

....

....

....

....

....

....

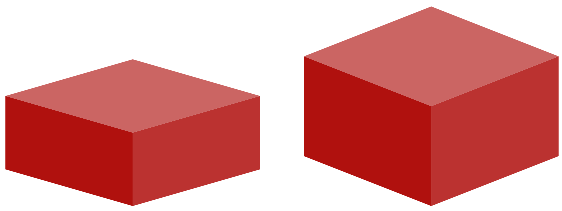
....

Klocki

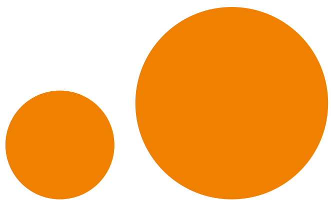
Klocki do ćwiczeń logicznego myślenia odgrywają istotną rolę w procesie kształtowania umiejętności klasyfikowania przedmiotów według: wielkości, kształtu i koloru, czyli umiejętności zawartych w podstawie programowej wychowania przedszkolnego w obszarze IV, dotyczącym poznawczego obszaru rozwoju dziecka.

Zestawy zawierają najczęściej po 48 lub 60 klocków[10] (graniastosłupów lub walców o niewielkiej wysokości – patrząc na nie z góry widzimy płaskie figury różniące się między sobą):

kolorem (czerwone, pomarańczowe, niebieskie)



grubością (wysokością klocka – cienkie, grube)



wielkością (małe, duże)

kształtem (trójkąty, prostokąty, koła, kwadraty i sześciokąty)

Określając poszczególne klocki, podajemy ich cztery właściwości – parametry. W komplecie nie ma dwóch identycznych klocków, dlatego układ właściwości w sposób jednoznaczny dotyczy jednego klocka. Każde dwa wybrane przez dziecko klocki różnią się jedną, dwiema, trzema albo czterema cechami, i podobnie – każde dwa klocki mają cechy wspólne lub nie.

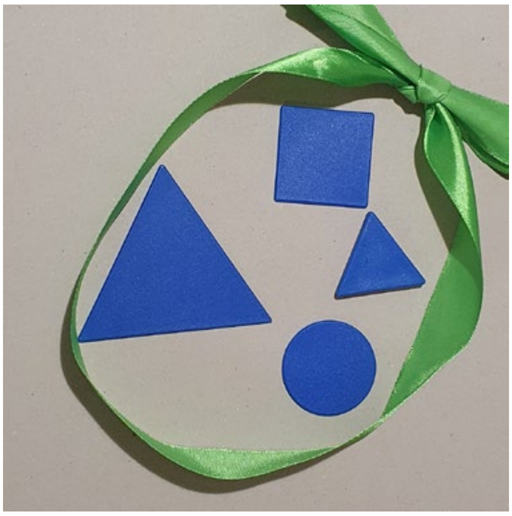
10 Obecnie na rynku oferowanych jest kilka modyfikacji klocków Dienesa różniących się liczbą elementów, kolorami, a nawet doborem kształtów.

Najczęściej stosujemy klocki logiczne do:

1. **Sortowania ze względu na wybraną cechę**

Fot. 36 Zbiór trójkątów

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



Fot. 37 Zbiór figur niebieskich

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

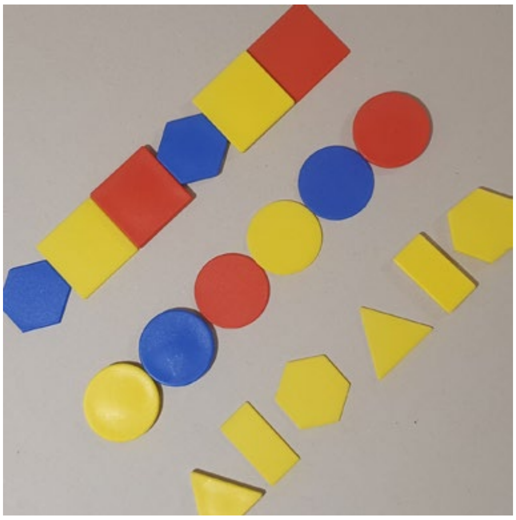
Fot. 38 Zbiór figur małych

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

Fot. 39 Zbiór figur grubszych (o większej wysokości)

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

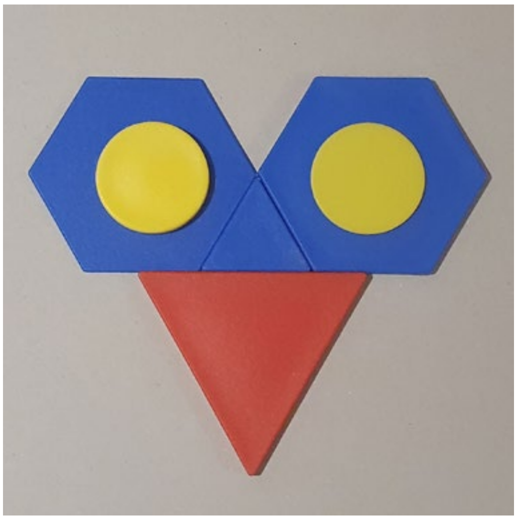
2. Układania motywów powtarzalnych (naśladowanie rytmu, tworzenie własnego rytmu)



Fot. 40 Tworzenie i naśladowanie rytmu

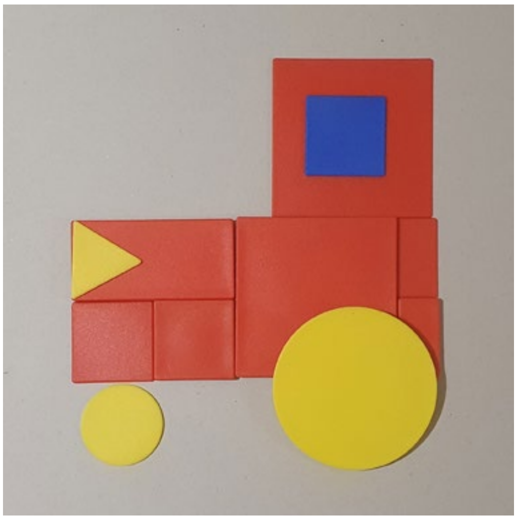
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

3. Układania obrazów (odtwarzanie i projektowanie prostych obrazków)



Fot. 41 Odtwarzanie i projektowanie prostych obrazków I

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



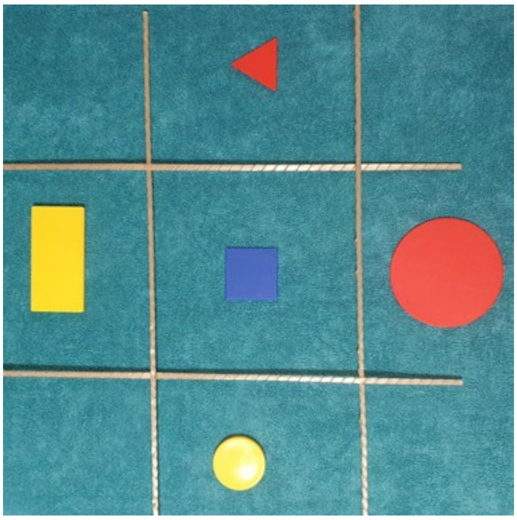
Fot. 42 Odtwarzanie i projektowanie prostych obrazków II

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

4. Wdrażania i rozwijania orientacji przestrzennej

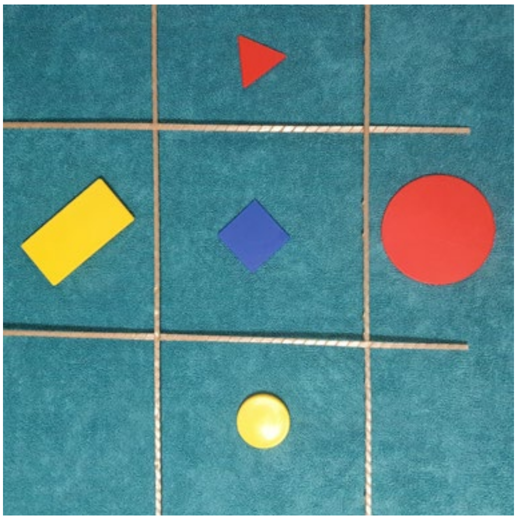
Zadanie polega na ułożeniu odpowiednich klocków według instrukcji podanej przez nauczyciela: „w środku jest mały niebieski kwadrat. Pod nim jest duże czerwone koło, a nad nim jest duży żółty prostokąt. Po lewej stronie od małego niebieskiego kwadratu jest żółte małe koło, a po stronie prawej – czerwony mały trójkąt". Uczeń pod dyktando zapełnia brakujące pola przed sobą. Dla ułatwienia orientacji nauczyciel przygotował kratkę, która jednoznacznie określa pozycję i jednocześnie wprowadza do rozwijanej w starszych klasach orientacji w układzie współrzędnych prostokątnych (fot. 43).

Zwróćmy uwagę na to, że położenie figur nie jest w tym przypadku istotne. Dobrze, jeśli nauczyciel doceni również rozwiązania, w których równoległość boków i ramki nie została zachowana (fot. 44).



Fot. 43 Ćwiczenia w kształtowaniu orientacji przestrzennej I

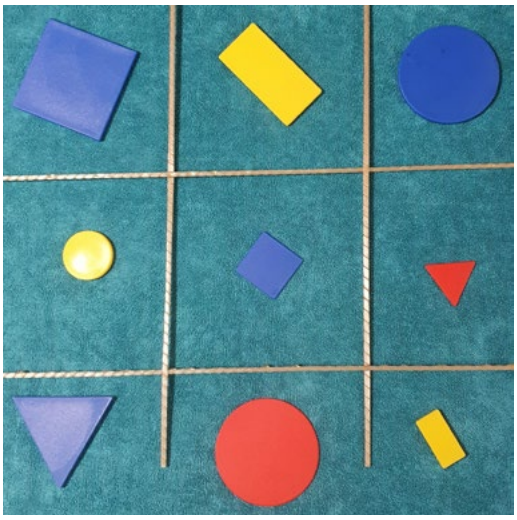
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



Fot. 44 Ćwiczenia w kształtowaniu orientacji przestrzennej II

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

Po poprawnym wykonaniu, nauczyciel uzupełnia polecenia: „nad małym żółtym kołem jest duży niebieski kwadrat, a poniżej małego żółtego koła jest niebieski duży trójkąt. Na prawo od czerwonego dużego koła jest mały żółty prostokąt. Nad małym czerwonym trójkątem jest duże niebieskie koło". Dziecko ćwiczy właściwe zrozumienie przyimków i nazw poszczególnych pojęć, uczy się klasyfikacji i uzupełnia układankę (fot. 45).



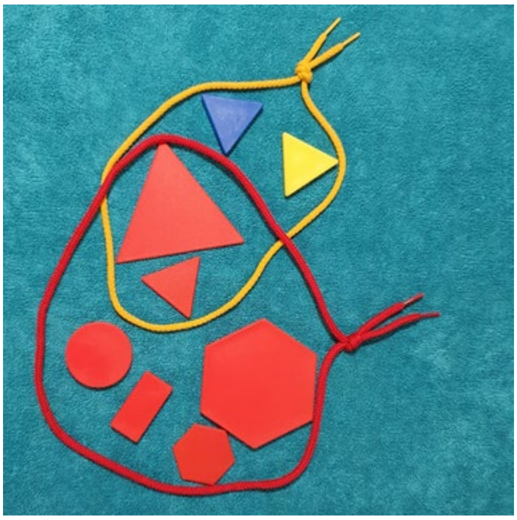
Fot. 45 Ćwiczenia w kształtowaniu orientacji przestrzennej III

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

W tej serii zadań łączymy ćwiczenie biegłości dziecka w posługiwaniu się kierunkami, wzajemnym położeniem figur, oraz rozróżnianiu figur ze względu na wielkość, kolor i kształt. Ćwiczymy również język matematyki w zakresie poprawnego, dwukierunkowego (uczeń – nauczyciel, nauczyciel – uczeń) posługiwania się nazwami figur geometrycznych.

5. Wyznaczania przekroju (części wspólnej) zbiorów

- A – zbiór figur czerwonych
- B – zbiór trójkątów
- A∩B – zbiór czerwonych trójkątów



Fot. 46 Wyznaczenie części wspólnej zbiorów

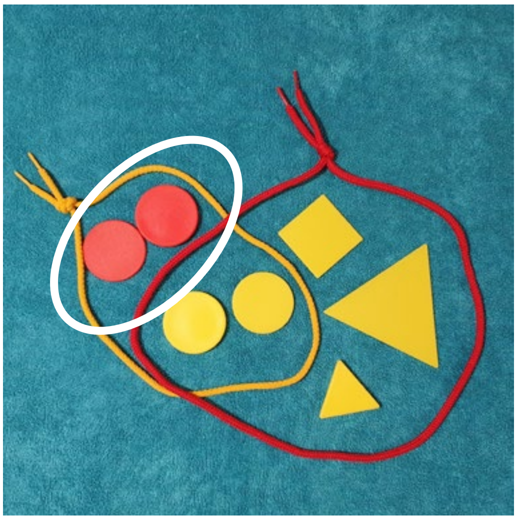
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

6. Wyznaczania sumy i różnicy zbiorów

Umówmy się, że zbiór wszystkich kół na obrazku oznaczamy literą A, a zbiór wszystkich figur żółtych literą B. Dziecko za pomocą wstążki lub szarfy zaznacza wszystkie koła, które nie są żółte, a następnie wszystkie figury żółte, które nie są kołami. Już na tym etapie rozwoju operacji logicznych dziecko może spostrzec, że różnica zbiorów nie jest przemienna.

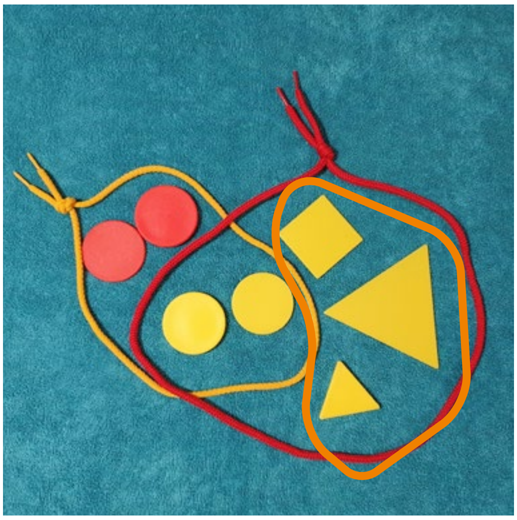
- A/B
wszystkie koła, które nie są żółte

- B/A
wszystkie figury żółte, które nie są kołami



Fot. 47 Wyznaczenie różnicy zbiorów A/B

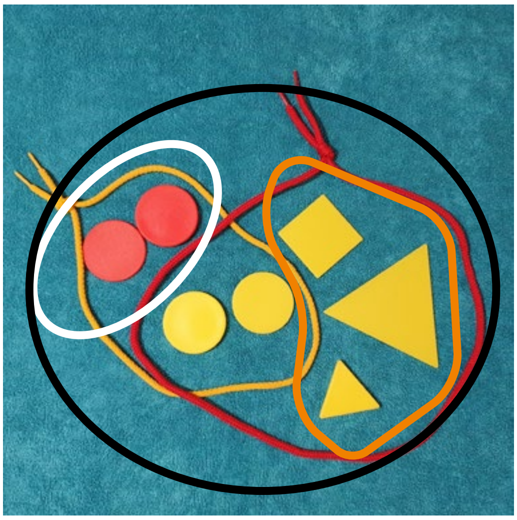
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



Fot. 48 Wyznaczenie różnicy zbiorów B/A

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

Następnie zaznacza wszystkie figury, które są żółte lub są kołami, i w ten sposób zaznajamia się z pojęciem sumy zbiorów. Dostrzega również fakt, że alternatywa zastosowana w poleceniu nie ma charakteru wykluczającego.

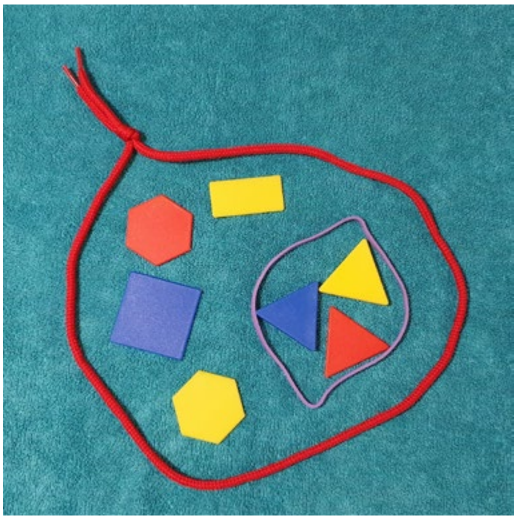


Fot. 49 Wyznaczenie sumy zbiorów AUB

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

7. Wyznaczania podzbiorów zbioru

Nauczyciel prosi o zaznaczenie tych spośród wielokątów (W), które są trójkątami (T). Dziecko za pomocą wstążki lub gumki wyznacza odpowiedni podzbiór W⊂T.



Fot. 50 Wyznaczenie podzbioru

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

Fot. 51 Przyporządkowanie osobom poszczególnych elementów zastawy

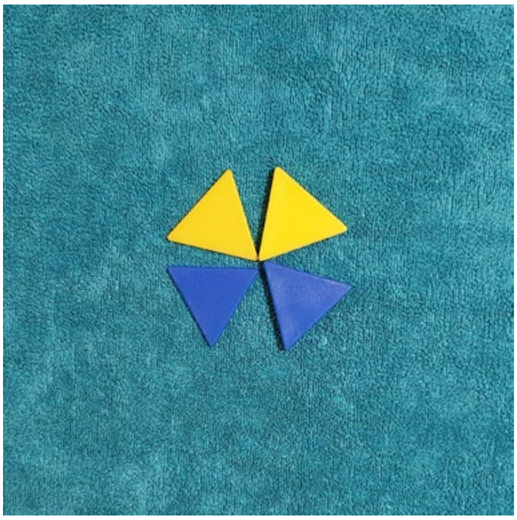
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

8. Kształtowania zarysów pojęcia funkcji

Nauczyciel prosi dziecko: „przygotuj podwieczorek dla rodziny: mamy, taty, cioci, brata i siebie. Ustaw talerz, na nim mały talerzyk oraz serwetkę złożoną w trójkąt". Dziecko używa klocków (duże koła, małe koła i trójkąty) do przyporządkowania poszczególnych części zastawy do konkretnych osób. Do każdego „argumentu", czyli do każdej osoby przypisuje poszczególne części nakrycia, stosując rozróżnienie pozycji na stole i koloru.

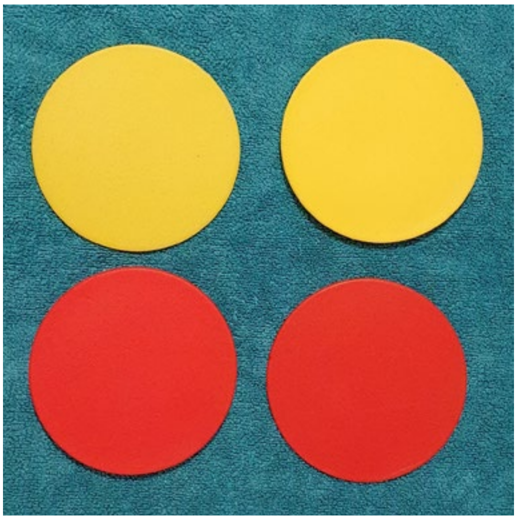
9. Kształtowania umiejętności sprawdzania równoliczności zbiorów

Nauczyciel zwraca się do dziecka: „na podwieczorek będą dzisiaj ciastka. Mam tacę ciastek i stos talerzyków. Czy wystarczy nam talerzyków?”.



Fot. 52 Sprawdzanie równoliczności zbiorów (zbiór ciastek)

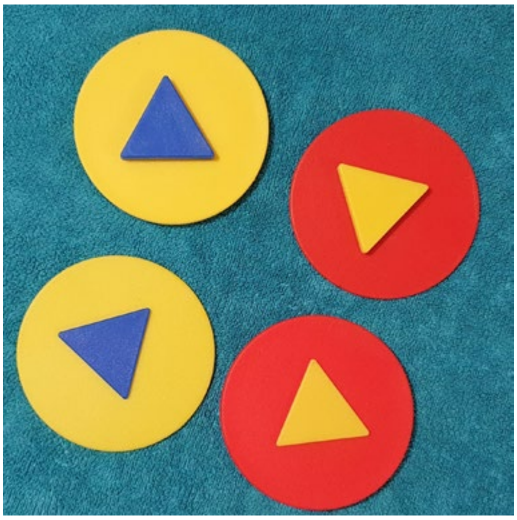
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



Fot. 53 Sprawdzanie równoliczności zbiorów (zbiór talerzyków)

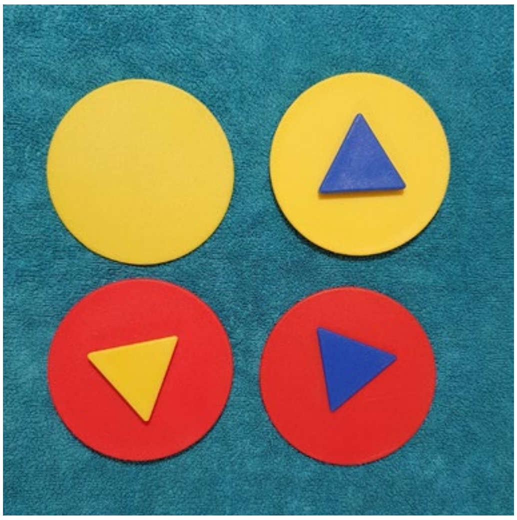
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

To pytanie, wyrażone językiem zrozumiałym dla dziecka, w istocie jest pytaniem o równoliczność zbioru ciastek i talerzyków. Jak znaleźć na nie odpowiedź? Można oczywiście policzyć ciastka na tacy i policzyć talerzyki w stosie. Jeśli otrzymamy te same liczby (moce zbiorów), to zbiory są równoliczne. Można jednak wybrać inna drogę, która jest skuteczna nawet dla młodszych dzieci, które nie opanowały jeszcze w stopniu zadowalającym umiejętności liczenia, czyli łączenia w pary. Każde ciastko kładziemy na jednym talerzyku wziętym ze stosu. Pierwsze na pierwszym, drugie na drugim itd. Jeśli ostatnie ciastko trafi na ostatni talerzyk, to znaczy, że było ich tyle samo, jeśli zostaną talerze, to znaczy, że było ich więcej.



Fot. 54 Zbiory są równoliczne

WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S



Fot. 55 Zbiory nie są równoliczne

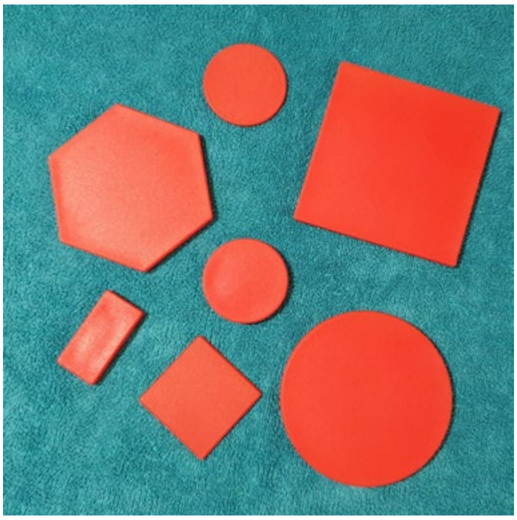
WP i 1-3 | 4-6 | P | Z | K | S

Sens takiego sposobu rozwiązania problemu matematycznego staje się bardziej wyrazisty w przypadku większej liczby elementów zbioru (np. ciastek dla wszystkich dzieci w przedszkolu).

10. Określania warunków spełnianych przez wyodrębnione elementy danego zbioru

Nauczyciel układa z klocków pewien podzbiór, a dziecko podaje własności jego elementów.

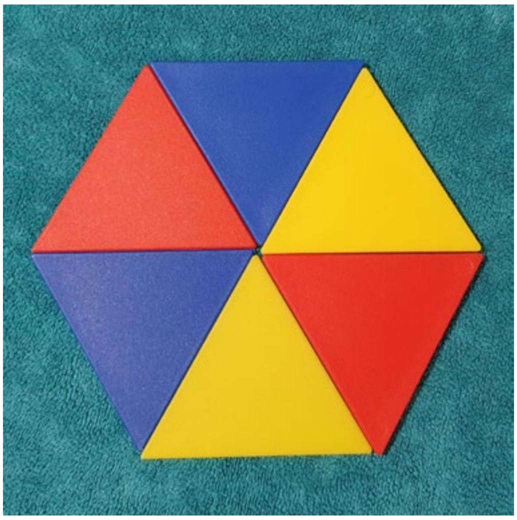
Zwróćmy uwagę na interesujące wypowiedzi Joasi i Adasia. Dzieci spostrzegły więcej własności, niż zakładał nauczyciel. Dziewczynka zauważyła możliwość parkietowania płaszczyzny sześciokątami i trójkątami foremnymi, a Adaś prawdopodobnie spostrzegł symetrię środkową.



Fot. 56 Zbiór figur czerwonych

WP i 1-3	4-6	P	Z	K	S

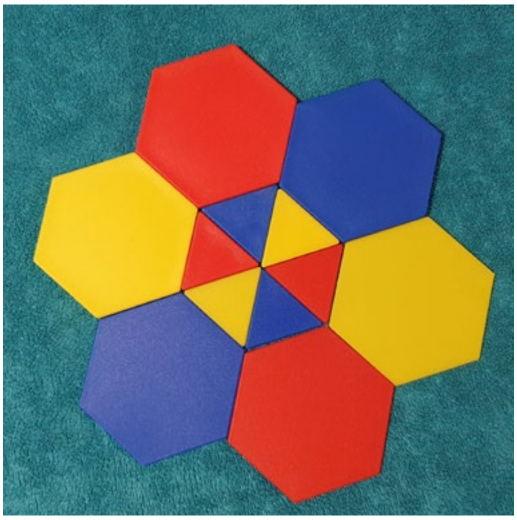
Ala: „mamy tu różne figury. Wszystkie są czerwone".



Fot. 57 Fragment mozaiki I

WP i 1-3	4-6	P	O	Z	K	S

Janek: „tu są duże trójkąty o różnych kolorach".



Fot. 58 Fragment mozaiki II

WP i 1-3	4-6	P	O	Z	K	S

Halinka: „tu są małe trójkąty i duże sześciokąty". Joasia: „Wszystkie figury pasują do siebie, na stole nie ma dziur między nimi". Adaś: „wszystkie figury są tak ułożone, że takie same są naprzeciwko siebie".

Więcej informacji na temat wspierania rozwoju intelektualnego dzieci, wdrażania do poprawnego klasyfikowania za pomocą klocków Dienesa, a także uwag dotyczących unikania pułapek dydaktycznych, można znaleźć w publikacjach Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej i Małgorzaty Zambrowskiej[11] oraz Alicji Heleny Komorowskiej-Zielony[12].

11 E. Gruszczyk-Kolczyńska i M. Zambrowska, *Klocki Dienesa. Przewodnik metodyczny*, Epideixis, 2019.

12 A. H. Komorowska-Zielony, *Wykorzystanie klocków w matematycznej edukacji przedszkolnej*, Forum Oświatowe Tom 30 Nr 2(60) (2018), s. 103-114.

Multimedia

Rzutnik pisma (grafoskop)

Rzutnik pisma co prawda nie jest urządzeniem multimedialnym, ale można go uznać za poprzednika nowoczesnych mediów. Ponieważ kiedyś wszystkie szkoły posiadały grafoskopy, można założyć stosunkowo łatwe zdobycie tego urządzenia. Rzutnik (fot. 59) umożliwia ekspozycję nie tylko pisma, ale również wykresów, grafów, fotografii i pisma odręcznego.

Fot. 59 Rzutnik pisma (skrzyniowy)

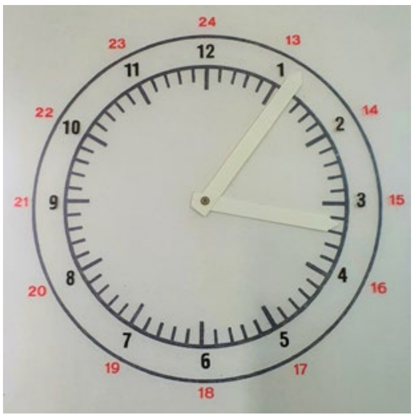
U W Z T K S

Dzięki systemowi optycznemu rzutnika można uzyskać równoległą wiązkę światła. Po ustawieniu obiektu na platformie rzutnika możemy zobaczyć cień, np. kładąc wycięte z papieru koło, na ekranie widzimy kilka razy większy cień koła, natomiast kładąc walec, możemy zobaczyć koło lub prostokąt (w zależności od sposobu ustawienia bryły).

Najbardziej typowym zastosowaniem rzutnika są folio- i fazogramy. Jedne i drugie można stosować np. w edukacji wczesnoszkolnej – do ćwiczeń w posługiwaniu się zegarem (fot. 60–62):

Fot. 60 Fazogram podstawowy – zegar

WP i 1-3 4-6 P S W K



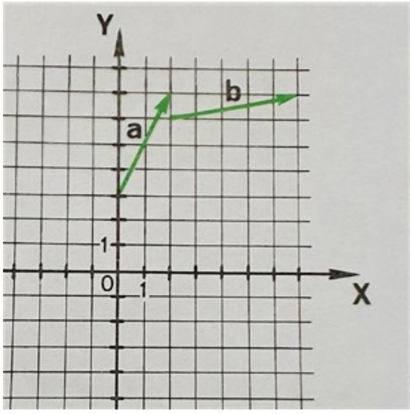
Fot. 61 Fazogram – zegar 12/24

WP i 1-3 4-6 P S W K

Fot. 62 Fazogram – zegar (zapis rzymski)

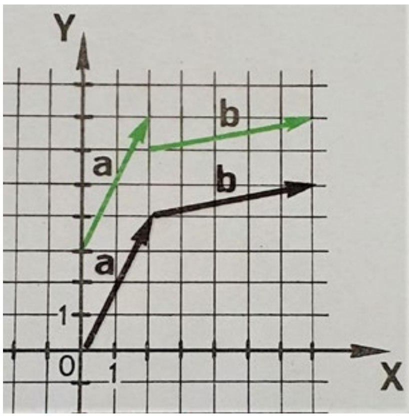
WP i 1-3 4-6 P S W K

Na innych poziomach kształcenia przyda się np. do ilustracji dodawania wektorów (fot. 63–65):



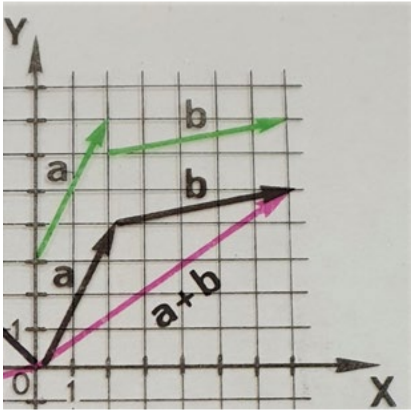
Fot. 63 Fazogram suma wektorów I

WP i 1-3 | 4-6 | P | S | W | K



Fot. 64 Fazogram suma wektorów II

WP i 1-3 | 4-6 | P | S | W | K



Fot. 65 Fazogram suma wektorów III

WP i 1-3 | 4-6 | P | S | W | K

Rzutnik jest również przydatny do wykonywania pokazu i ćwiczeń w zakresie rzutowania – np. przestrzennych modeli żeberkowych na płaszczyznę (fot. 66), lub do poszukiwania figur przestrzennych rzucających identyczne cienie (np. kula, walec, stożek). Ciekawym zadaniem jest poszukiwanie różnych cieni np. sześcianu poprzez manipulowanie położeniem źródła światła.

Fot. 66 Rzutowanie modelu czworościanu foremnego na płaszczyznę za pomocą rzutnika

U | S | O | W | K

Często jako płaszczyznę rzutni wykorzystujemy biały ekran. Warto odgiąć go pod pewnym kątem, aby zaobserwować np. krzywe stopnia drugiego. Ciekawym i bardzo polecanym jest takie ustawienie rzutnika, aby obraz trafiał w białą tablicę (np. ceramiczną). Daje to możliwość zastosowania foliogramów bazowych oraz interakcji ręcznych na tablicy. Przykładami takich zastosowań są:

- Przekształcenia geometryczne – np. przesunięcia o wektor.
- Rysowanie wykresów funkcji trygonometrycznych na tablicy, na którą rzucamy foliogram z układem współrzędnych z zaznaczeniem jednostek – na osi rzędnych 1 to dwie kratki, a na osi odciętych liczba π zaznaczona będzie po szóstej kratce, czyli 3 cm od punktu (0,0).
- Graficzne rozwiązywanie układów równań.

Projektory multimedialne

Projektory multimedialne umożliwiają odtwarzanie filmów, prezentacji multimedialnych i praktycznie wszelkich materiałów cyfrowych.

Zastosowanie dydaktyczne projektorów jest bardzo szerokie. Zasadniczo pozwalają na przedstawienie wszystkiego, co widzimy na ekranie komputera, tabletu, odtwarzacza video i innych urządzeń. Należy pamiętać, że funkcjonalność projektora docenimy dopiero po podłączeniu do niego urządzeń zewnętrznych, które dostarczają sygnał. Możemy zatem wyemitować film (np. o historii matematyki czy o liczbach pierwszych), przedstawić prezentację (np. o figurach obrotowych czy klasyfikacji czworokątów). Możemy również w integrujący sposób wspomagać metodę dydaktyczną, jaką jest pokaz. W tym celu potrzebne będzie jeszcze jedno urządzenie zwane wizualizerem.

Wizualizer

Wizualizer to proste w obsłudze urządzenie, w skład którego wchodzi kamera i statyw. W wersji stacjonarnej posiada również ekran roboczy wyposażony w system podświetlenia LED[13]. Czasem są dodatkowe porty, dzięki którym można podłączyć mikroskop, smartfon i inne aparaty zewnętrzne. Wizualizery umożliwiają demonstrację na dużym ekranie projektora (lub w sieci) tekstów, obrazów, grafik, plansz, książek, tablic, ruchu i manipulacji dowolnymi przedmiotami (płaskimi lub przestrzennymi). Ważne jest też to, że można prezentować konkretne czynności matematyczne w czasie rzeczywistym w takich samych warunkach jak uczniowie. Na przykład konstrukcja dwusiecznej kąta wykonana na tablicy wymaga pionowej orientacji, natomiast uczeń wykonuje ją w zeszycie, który poziomo leży na ławce. Poza tym, podczas prezentowanej przez nauczyciela konstrukcji używa on dokładnie tych samych przyborów geometrycznych co uczniowie w klasie.

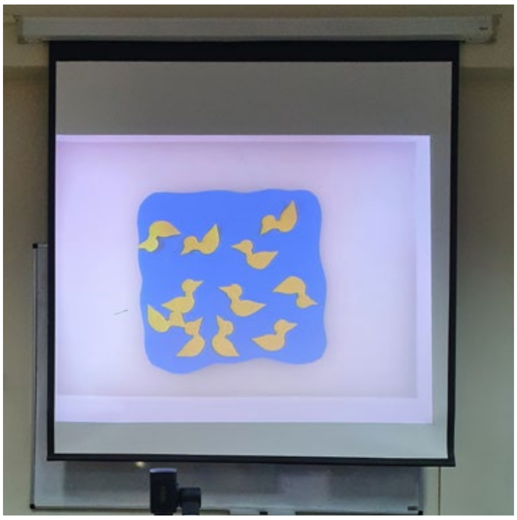
Szczególnie cenną funkcją wizualizera jest to, że nauczyciel może podczas zajęć przez cały czas zachować kontakt wzrokowy z uczniami. Pozwala to na częstsze interakcje oraz na precyzyjne i natychmiastowe reagowanie na niewerbalne sygnały uczniów. Wizualizery umożliwiają również szybką prezentację prac uczniów na forum klasy, można np. przedstawiać wszystkim najciekawsze pomysły lub próby rozwiązania zadania.

Wizualizery nadają się np. do pokazu konstrukcji geometrycznych, ilustracji przekątnych brył w zadaniach stereometrycznych, a podczas zajęć z młodszymi dziećmi – do ilustracji rozwiązywanych zadań (fot. 67–68), do pokazu matematycznego origami (fot. 69–70), tangramów i różnego rodzaju gier i układanek (puzzle, domino).

13 Wizualizery wyposażone w system wspomagania oświetlenia mogą również służyć do wyświetlania folio- i fazogramów.

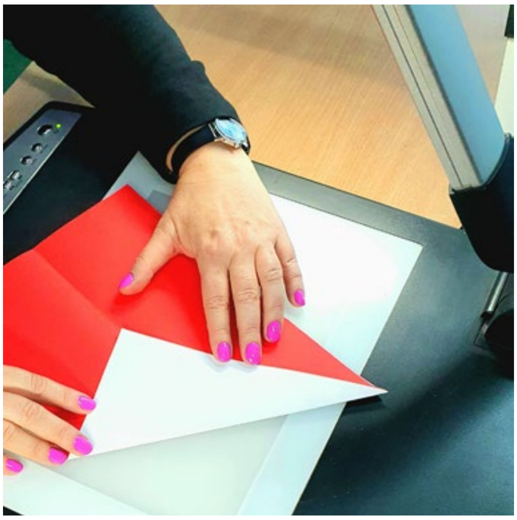
Fot. 67 Wizualizer – zastosowanie w wychowaniu przedszkolnym lub w edukacji wczesnoszkolnej (ilustracja zadania o kaczkach pod kamerą)

WP i 1-3 W Z K



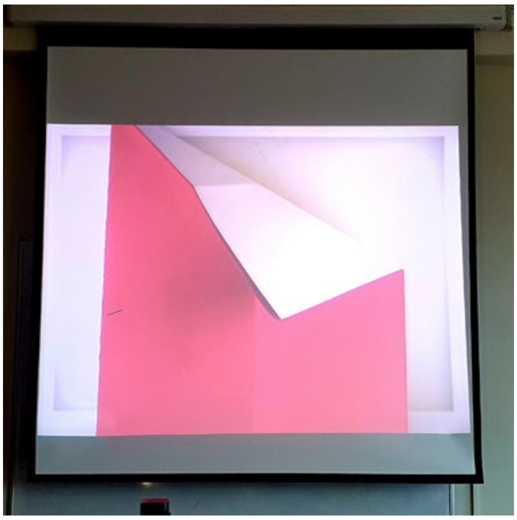
Fot. 68 Wizualizer – zastosowanie w wychowaniu przedszkolnym lub w edukacji wczesnoszkolnej (ilustracja zadania o kaczkach – obraz wyświetlony przez projektor)

WP i 1-3 W Z K



Fot. 69 Wizualizer – zastosowanie w wychowaniu przedszkolnym lub w edukacji wczesnoszkolnej. Pokaz składania matematycznego origami pod kamerą

WP i 1-3 4-6 W Z K O



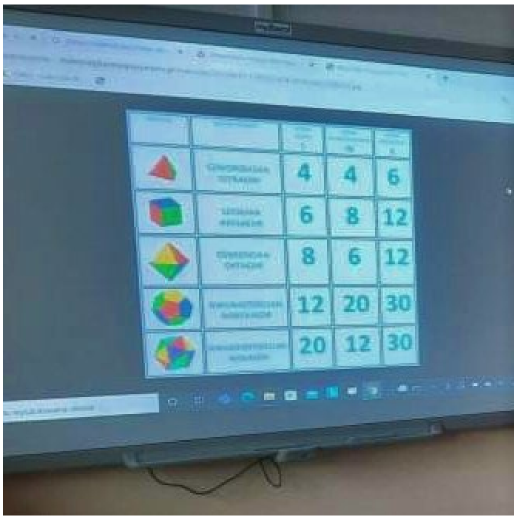
Fot. 70 Wizualizer – zastosowanie w wychowaniu przedszkolnym lub w edukacji wczesnoszkolnej. Pokaz składania matematycznego origami wyświetlony przez projektor

WP i 1-3 4-6 W Z K O

Tablica interaktywna

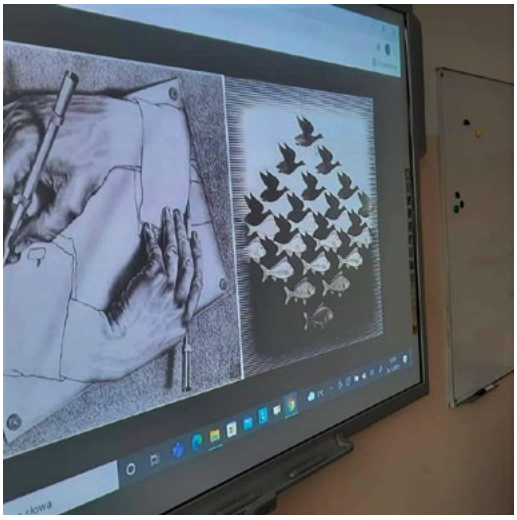
Urządzeniem, które zrobiło wielką karierę w polskich szkołach jest znana w wielu krajach już od ok. 30 lat tablica interaktywna. Wyglądem przypomina biały ekran-tablicę, wyposażona jest w czuły ekran dotykowy, współpracuje z komputerem i projektorem multimedialnym (fot. 71–72). Do najważniejszych zalet tablic interaktywnych należą:

- lepsza czytelność wykresów, tabel, rysunków i konstrukcji geometrycznych,
- ułatwienie rozwiązywania zadań matematycznych różnymi sposobami,
- ułatwienie stosowania strukturalizacji barwnej tekstu matematycznego i lepsza estetyka pracy,
- większa motywacja, koncentracja uwagi, aktywność, kreatywność i współpraca uczniów podczas lekcji, lepsza organizacja pracy grupowej,
- łatwość przygotowania materiałów na lekcje, zwiększenie ich ilości i podniesienie ich jakości,
- ułatwiona współpraca edukacyjna pomiędzy nauczycielami,
- bardziej efektywna organizacja i krótszy czas na przygotowywanie przez nauczycieli materiałów dydaktycznych, możliwość zgromadzenia wszelkich materiałów (treści, zadań, przykładów, filmów, ilustracji itp.) w jednym miejscu,
- ułatwienie powtarzania i utrwalania wiedzy i umiejętności uczniów,
- możliwość nagrywania lekcji lub jej fragmentów oraz współpracy z tabletem graficznym.



Fot. 71 Prezentacja wielościanów platońskich na tablicy interaktywnej

U S W Z T P



Fot. 72 Prezentacja grafik M. C. Eschera na tablicy interaktywnej

U S W Z T P

Poza tym nauczyciele matematyki[14] podkreślają skuteczność tablic interaktywnych w przekazywaniu nowych treści, prezentowaniu twierdzeń i ich obrazowych ilustracji, powtarzaniu i syntezie materiału, pracy z uczniem uzdolnionym, przedstawianiu ciekawostek historycznych, zastosowań i użyteczności matematyki. Tablica interaktywna może służyć jako ekran połączony z komputerem. Do najczęściej stosowanych przez nauczycieli programów komputerowych należą: arkusz kalkulacyjny (np. do obliczania wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych; two-

14 M. Kosztołowicz, *Tablica interaktywna na lekcjach matematyki,* https://www.tablice.net.pl/tablica-interaktywna-na-lekcjach-matematyki/

rzenia diagramów słupkowych w oparciu o dane samodzielnie zebrane lub pobrane, analizowania wzajemnego położenia prostych), GeoGebra, Cabri, SketchUp, DPGraph, Octave (np. do kreślenia wykresów funkcji dwóch i wielu zmiennych, wyznaczania zbioru punktów i określonej własności, sprawdzania cech przystawania i cech podobieństwa trójkątów, rozwiązywania równań). Dla młodszych dzieci stosują często program Sebran's ABC (Zebra), Pitagoras, Graph, Euklides, Geometria i wiele innych.

Spoty dydaktyczne

Do projekcji za pomocą ekranów, elektronicznych tablic czy projektorów dobrze nadają się między innymi krótkie filmy zwane spotami dydaktycznymi. Są to materiały multimedialne powstałe w celu edukacyjnym, trwające 30–240 sekund, zapisywane w formatach filmowych (np. avi, mp4, wmv, mov), trafiające „w punkt". Sens przygotowania spotu dydaktycznego związany jest z potrzebą szybkiego zaznajomienia ucznia z dużą liczbą dobrze dobranych obrazowych przykładów ilustrujących dane pojęcie lub prowadzących do jego określenia. Spot dydaktyczny może też przedstawiać konkretne rozumowanie lub ilustrować dowód. Może sugerować kroki prowadzące do odkrycia zależności lub twierdzenia. Może przedstawiać i rozwiązywać matematyczny problem sformułowany w postaci zadania.

Istotą spotu dydaktycznego jest ukierunkowanie na konkretny cel edukacyjny, realizacja za pomocą łączenia technik dźwiękowych i obrazowych, prostota i dynamiczny charakter przekazu. Pomysł na spot powinien uwzględnić krótki czas skupienia uwagi ucznia, potrzebę zaciekawienia, inspiracji. Przed rozpoczęciem montażu spotu należy przygotować szczegółowy scenopis, który powinien uwzględniać: temat, cel, odbiorcę, sposób realizacji, wykaz wszystkich kadrów z uwzględnieniem czasu ich emisji, kolejności, informacji tekstowych, nagrań. Spoty dydaktyczne mogą wykonywać za pomocą powszechnie dostępnych darmowych aplikacji (np. Zdjęcia w Windows) nauczyciele, studenci, ale też uczniowie.

Kalkulatory

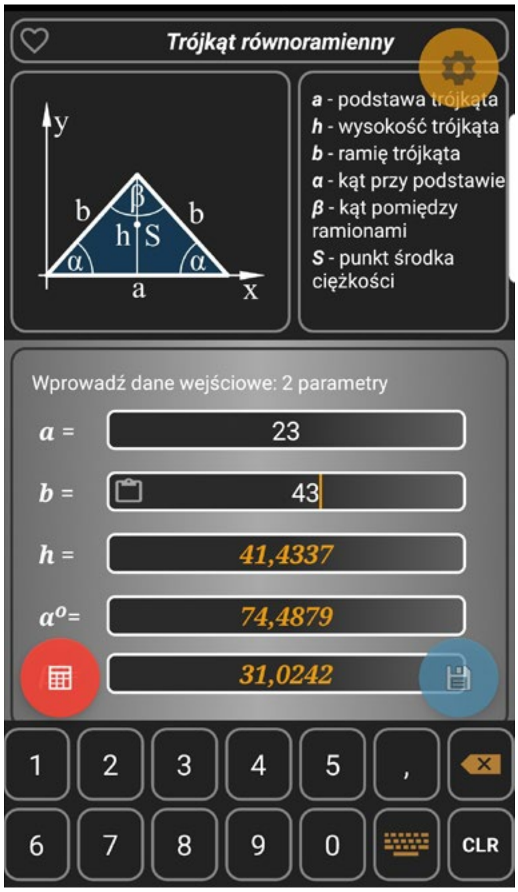
Do interesujących środków dydaktycznych szczególnie z punktu widzenia edukacji matematycznej w szkołach ponadpodstawowych należą różnego typu kalkulatory, w tym kalkulatory graficzne. Warto zapoznać się z ich możliwościami i wykorzystać je podczas lekcji matematyki z uczniami starszymi. Kalkulatory graficzne obok standardowych rachunków charakteryzują się dużym podświetlanym ekranem o odpowiednim kontraście, mają dobrze opracowany system edycji wzorów i formuł (można łatwo kopiować, wycinać, zapamiętywać i wklejać wybrane fragmenty wzorów). Umożliwiają programowanie, dokonywanie obliczeń podstawowych na macierzach, obliczeń statystycznych, finansowych, sporządzenie wykresów funkcji, rozwiązywanie równań, nierówności i układów, wykonywanie konstrukcji geometrycznych, kreślenie różnego typu wykresów, diagramów, histogramów. Poza tym na uwagę zasługuje możliwość prostego podłączenia z komputerem i urządzeniami prezentacyjnymi.

Smartfony i aplikacje

Choć w wielu szkołach używanie smartfonów jest zakazane, warto wspomnieć o najbardziej popularnych androidowych aplikacjach edukacyjnych z matematyki. Są to: Math Solver, Photomath, iMathematics czy Socratic. Aplikacje te nie tylko rozwiązują zadania bez konieczności wprowadzania do pamięci ich treści (wystarczy fotografia lub skan treści zadania), ale również podają poszczególne kroki rozwiązania, nierzadko z komentarzami i wskazówkami. Aplikacje na smartfony umożliwiają np. szybkie wyświetlenie wykresu skomplikowanej funkcji (fot. 73) lub obliczenie pola wielokąta (fot. 74).

Fot. 73 Zrzut z ekranu smartfona z wykresem funkcji $y=\sin(\frac{1}{x})+2$ w aplikacji Grapher Free

7-8 SPP S W Z T P



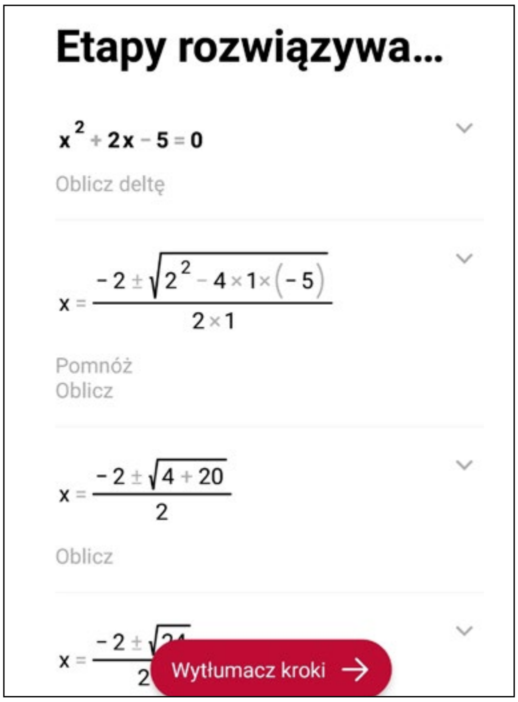
Fot. 74 Zrzut z ekranu smartfona z programem do obliczania pól trójkątów w aplikacji Geometryx

7-8 SPP S W Z T P

Aplikacja Photomath wymaga jedynie zeskanowania równania zapisanego ręcznie lub wydrukowanego (fot. 75–78). W wyniku jej działania otrzymujemy wynik, rozwiązanie i wskazówki.

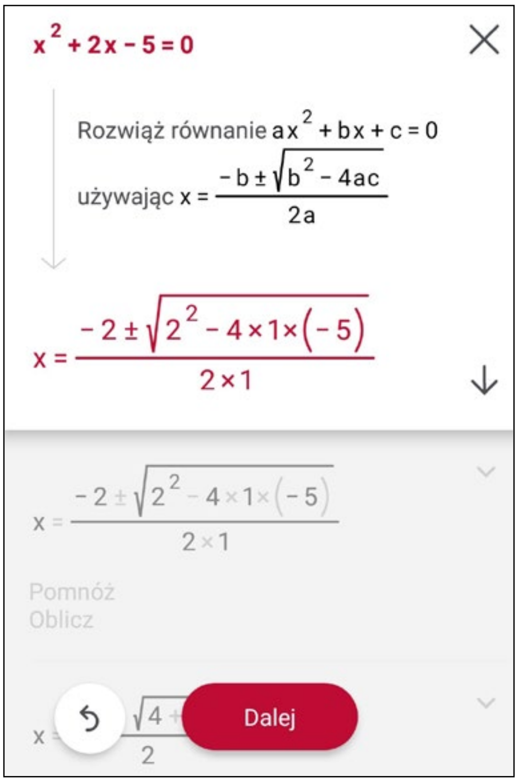
Fot. 75 Rozwiązanie równania kwadratowego w aplikacji Photomath (na smartfona)

7-8 SPP S W Z T P



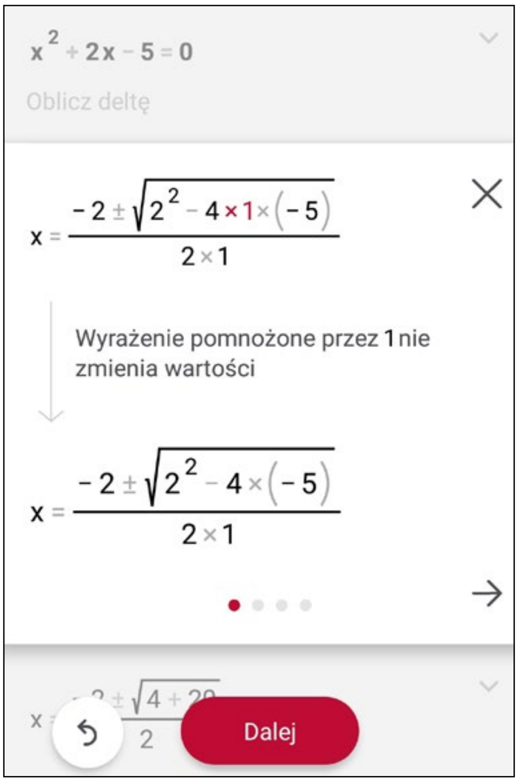
Fot. 76 Wskazówki rozwiązania równania kwadratowego w aplikacji Photomath (na smartfona) I

7-8 SPP S W Z T P



Fot. 77 Wskazówki rozwiązania równania kwadratowego w aplikacji Photomath (na smartfona) II

7-8 SPP S W Z T P

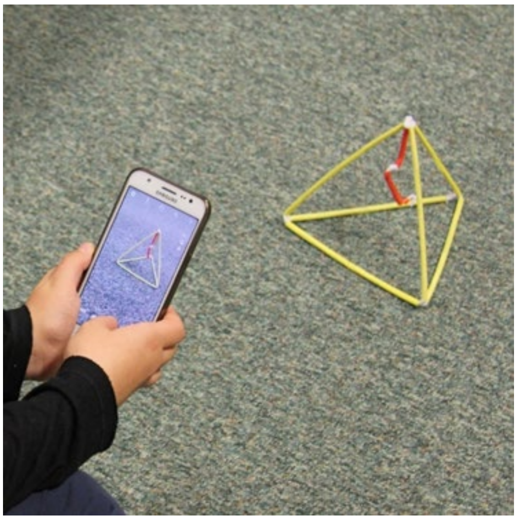


Fot. 78 Wskazówki rozwiązania równania kwadratowego w aplikacji Photomath (na smartfona) III

7-8 SPP S W Z T P

Zrób to sam

Uczniowie często sięgają po smartfony, aby sfotografować obiekt, który wiąże się z matematyką. Podczas zajęć ze stereometrii uczennica fotografuje utworzony przez siebie model czworościanu foremnego (fot. 79). Do jego wykonania użyła słomek do picia oraz frotek do czyszczenia fajek (fot. 80). Taki sposób konstruowania modeli żeberkowych figur przestrzennych rozwija dziecięcą pomysłowość, umiejętność przewidywania, nazywania i tworzenia lekkich i tanich obiektów przestrzennych.



Fot. 79 Uczennica fotografująca smartfonem samodzielnie wykonany ze słomek model żeberkowy czworościanu foremnego

U S K O

Do samodzielnego wykonania modeli żeberkowych potrzebne są jedynie nożyczki, słomki do napojów oraz tzw. frotki[15] lub wyciory do czyszczenia fajek[16]. Aby wykonać model sześcianu, uczeń musi przygotować 12 słomek o jednakowej długości oraz druciki wyciorów lub frotki.

Fot. 80 Materiały potrzebne do konstrukcji modeli żeberkowych

U S K O

Fot. 81 Model żeberkowy czworościanu foremnego wykonany przez ucznia

U S K O

Fot. 82 Model żeberkowy sześcianu wykonany przez ucznia

U S K O

15 Dostępne w sklepach papierniczych
16 Dostępne w sklepach specjalistycznych

Zamiast gotowych, zakupionych modeli można włączyć uczniów w samodzielne przygotowanie konstrukcji. Niektórzy stosują w tym celu plastelinę i wykałaczki, inni – kulki wykonane z folii aluminiowej, jeszcze inni – kartki A4 i sznurek (fot. 84).

Fot. 83 Model żeberkowy zakupiony w sklepie

U S K O

Fot. 84 Model żeberkowy wykonany samodzielnie z kartek papieru i sznurka

U S K O

Miejsce na notatki...

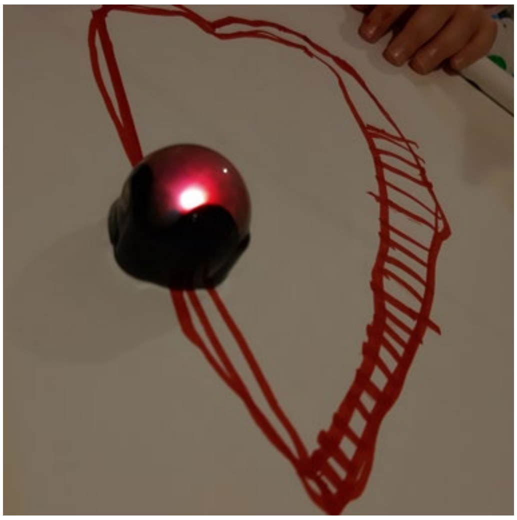
Ozoboty

Ostatnio dużą popularnością cieszą się ozoboty, czyli niewielkie roboty, które mogą poruszać się po powierzchni płaskiej (tekturze, planszy, arkuszu papieru, podłodze, stole). Istotnymi elementami każdego ozobota są zamontowane w jego dolnej części czujniki zdolne do odczytania barwy podłoża, a także kierunku i kodu trasy (fot. 85).

Fot. 85 Czujniki ozobota czytają kolorowe kody umieszczone na trasie

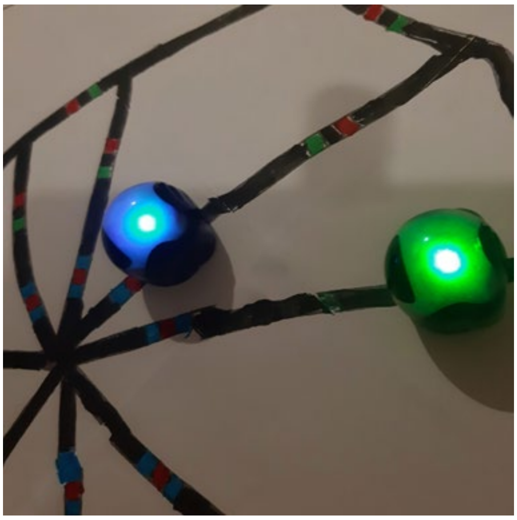
U S K W O

Tor ruchu ozobota to linia lub krzywa o szerokości ok. 0,5 cm. Tory mogą być wcześniej przygotowane (wydrukowane, zakupione itp.) lub narysowane flamastrem. Wygląd ozobotów jest bardzo atrakcyjny. Urządzenie wielkości nie większej od mandarynki jest widoczne z daleka za sprawą zamontowanej kolorowej diody LED. Jej światło jest zgodne z kolorem podłoża, po którym porusza się robot (fot. 86–87). Barwa zmienia się, reagując na zmianę kodu odczytanego z trasy.



Fot. 86 Ozobot poruszający się po trasie czerwonej

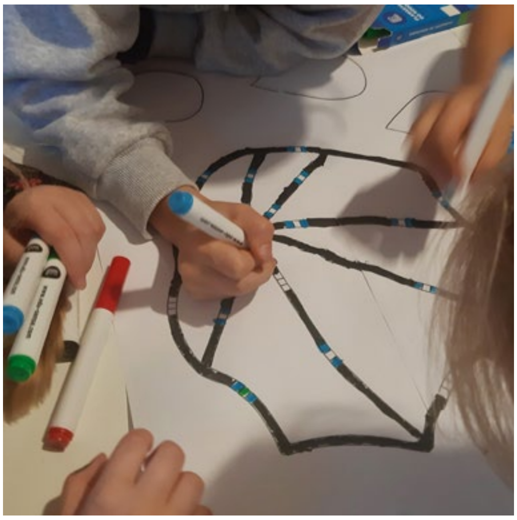
U S K W O



Fot. 87 Dwa ozoboty poruszające się po wyznaczonych trasach

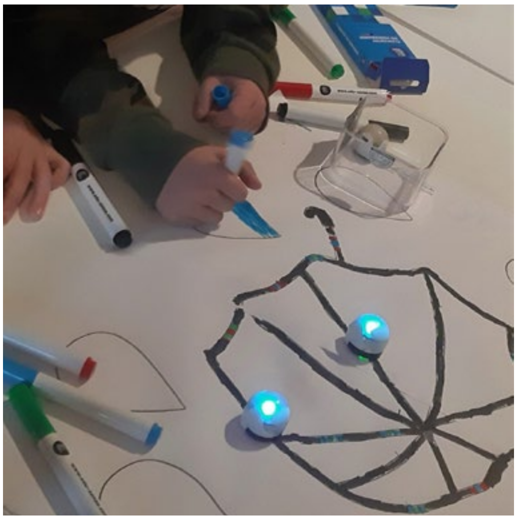
U S K W O

Ozoboty można z powodzeniem stosować już u dzieci przedszkolnych (4–5 letnich)”.Elementarne zadania polegają na projektowaniu i rysowaniu tras o przeróżnych kształtach i kolorach podanych przez wychowawcę lub wybranych przez dziecko. Robot rozróżnia i interpretuje układy czterech kolorów (czarny, zielony, czerwony i niebieski) oraz reaguje np. zmianą sposobu poruszania się na określony kod, czyli sekwencję barw (fot. 88–89). Na poziomie elementarnym można zastosować gotowe kody, np. w postaci puzzli dostarczonych przez producenta. Z poszczególnych elementów układany jest tor ruchu ozobota. Tego typu ćwiczenia rozwijają rozpoznawanie, nazywanie i umiejętność rysowania kształtów figur geometrycznych (np. trasa kwadratowa, trójkątna itp.) w poszczególnych kolorach. Dziecko nie tylko doskonali orientację przestrzenną, ale także posługuje się nowymi pojęciami, takimi jak: „skrypt”, „komenda”, „pętla”. Zostaje w ten sposób stopniowo wprowadzane w tajniki programowania. Umieszczenie na trasie ozobota kodu barwnego (sekwencji kilku kwadratów o opisanych w instrukcji barwach) programuje ruch ozobota. Po wykryciu kodu ozobot reaguje na wczytany przez siebie kod, zmieniając prędkość, zatrzymując się lub np. skręcając w prawo.



Fot. 88 Programowanie kodów trasy ozobota przez dzieci w młodszym wieku szkolnym

U S K W O



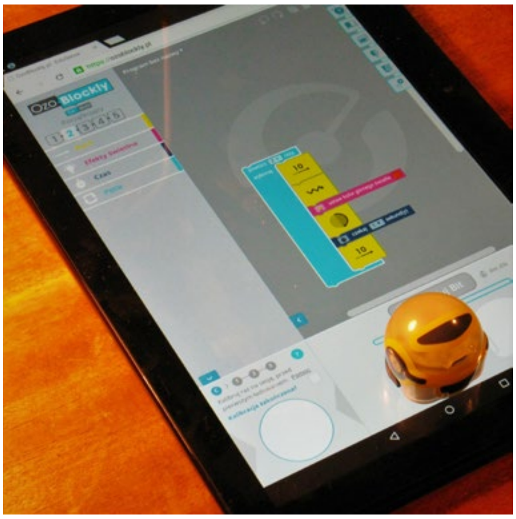
Fot. 89 Weryfikowanie samodzielnie narysowanych kodów trasy ozobota przez dzieci w młodszym wieku szkolnym

U S K W O

Uczniowie z entuzjazmem reagują na ozoboty. Chętnie wymyślają nowe funkcje, utrudnienia, pułapki i w ten sposób stosują coraz bardziej złożone polecenia. Z rysowaniem barwnych kodów dobrze radzą sobie uczniowie 2–3 klasy szkoły podstawowej (wymagana jest tu pewna sprawność manualna, osiągana przy nauce pisania). Taki sposób wykorzystania ozobota pozwala trenować umiejętność planowania oraz tworzenia prostego algorytmu (jako sekwencji poleceń dla robota).

Do pracy ze starszymi uczniami warto zastosować aplikacje przygotowane przez producenta, które pozwalają rozszerzyć zakres komend i zarazem wprowadzać uczniów w bardziej zaawansowane techniki programistyczne. Uczniowie mogą na ekranie komputera lub tabletu zbudować niczym z klocków swój wirtualny algorytm dla ozobota. Oprócz prostych poleceń sterujących robotem dostępne są typowe dla języków programowania elementy, jak pętle, warunki i zmienne.

Po stworzeniu „przepisu” na ruch ozobota, uczeń umieszcza go na odpowiednim polu ekranu tabletu tak, aby program został pobrany i zapisany w pamięci ozobota (fot. 90).



Fot. 90 Pobieranie programu przez ozobota
z ekranu tabletu

U S K O

W tej sytuacji ozobot nie potrzebuje już rysowanych lub układanych z puzzli tras. Zostały one przez ucznia przewidziane i zaprogramowane w ciągu poleceń. Stosowanie ozobotów przypomina wprowadzone pół wieku temu programowanie w języku LOGO czy Baltie z zapewnieniem natychmiastowej i realistycznej realizacji pomyślanych komend i procedur. Ozobot rozumiany nie tylko jako zabawka, ale również jako nowoczesny środek dydaktyczny może być spełnieniem marzenia Seymoura Paperta jako narzędzie służące konkretyzacji i personalizacji abstrakcji[17]. Poza tym doskonale służy rozwijaniu wyobraźni i zachęca uczniów do twórczości w aspektach artystycznych, poznawczych i konstrukcyjnych.

Miejsce na notatki..

....

....

....

....

....

....

....

....

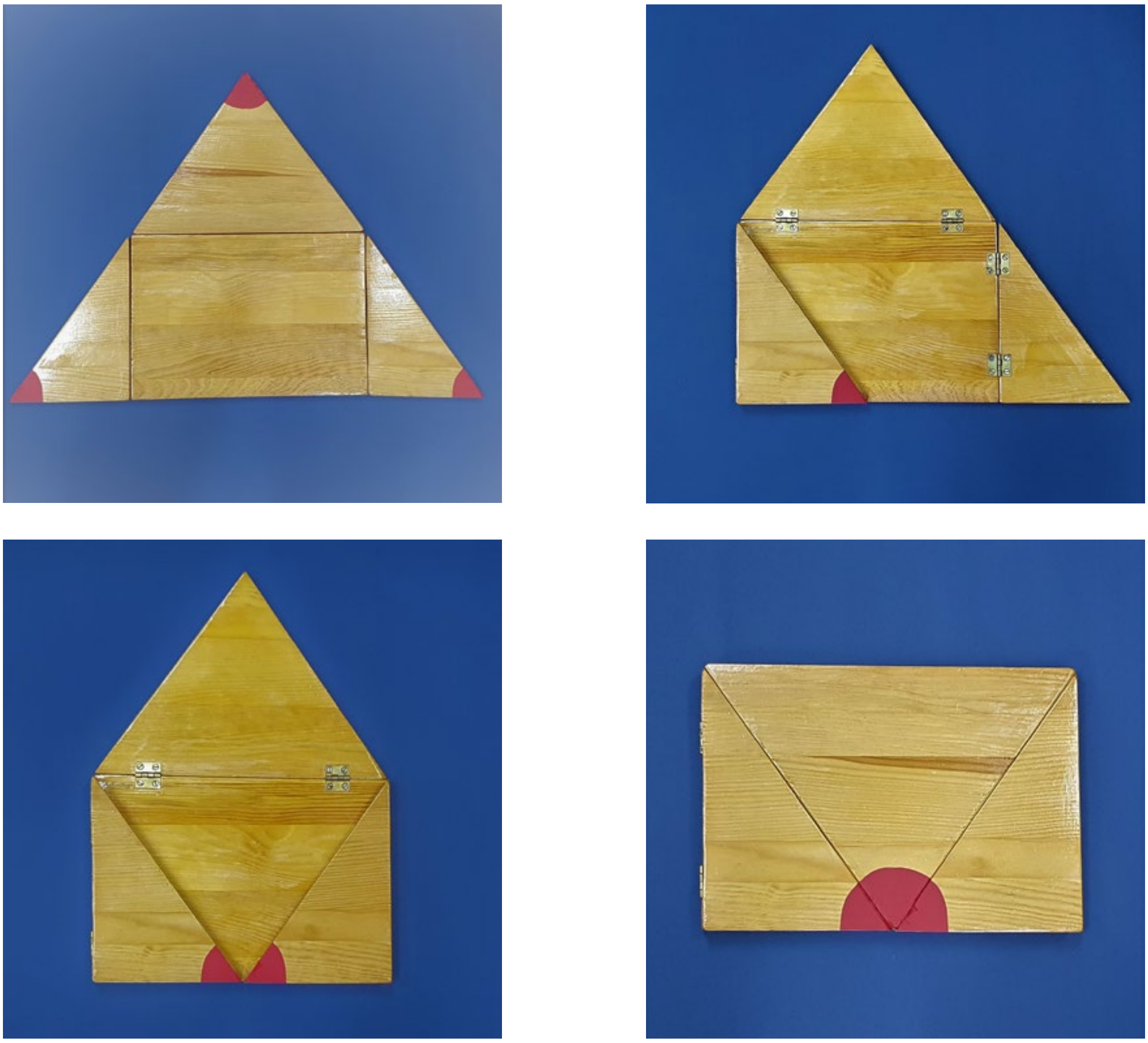
....

17 S. Papert, *Burze mózgów. Dzieci i komputery.* PWN, Warszawa, 1996, s. 41.

Modele interaktywne do ilustracji twierdzeń matematycznych

Dydaktyka matematyki rozróżnia proces przeprowadzenia dowodu twierdzenia od nabrania przeświadczenia o jego prawdziwości. W nauczaniu szkolnym stosujemy modele ilustrujące, naprowadzające lub wspomagające uczniowskie spostrzeganie.

Przykładem ilustracji twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta jest model wykonany z drewna (fot. 91–94), którego sens polega na złożeniu odciętych „rogów" trójkąta w jednym punkcie i uzyskaniu kąta półpełnego.

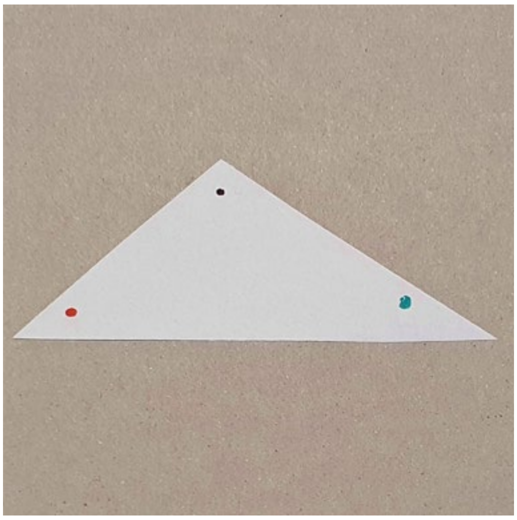


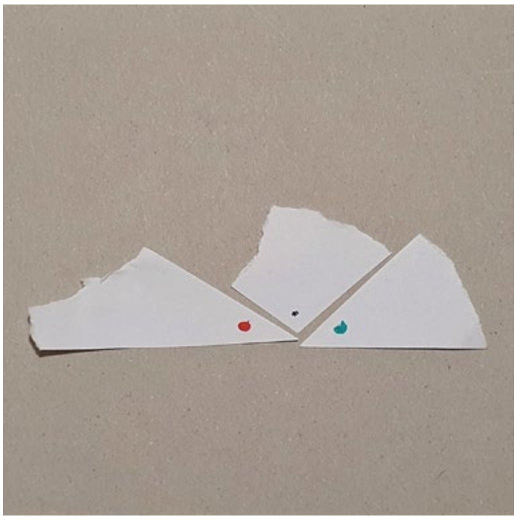
Fot. 91–94 Ilustracja twierdzenia o sumie kątów trójkąta

4-6 7-8 SPP T Z

Zrób to sam

Ilustrację taką można zastąpić własnoręcznie wyciętymi z papieru trójkątami przystającymi (fot. 95–96).





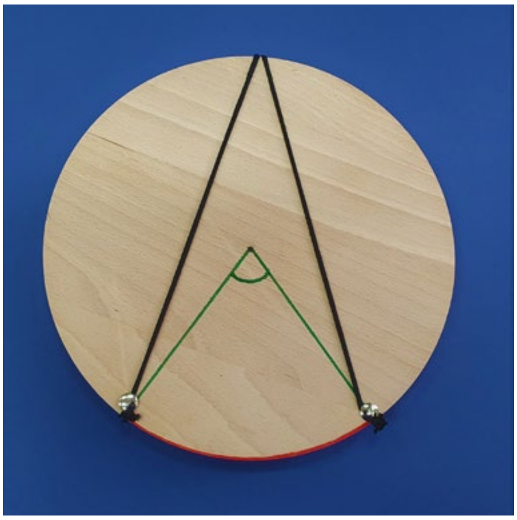
Fot. 95–96 Ilustracja twierdzenia o sumie kątów trójkąta

4-6 7-8 SPP T Z

Twierdzenie o miarach kątów: środkowego i wpisanego w okrąg opartych na tym samym łuku bardzo dobrze ilustruje i pomaga w przeprowadzeniu dowodu formalnego interaktywny model wykonany z pleksi (fot. 97) lub drewnianej deski do krojenia (fot. 98).

Fot. 97 Model z pleksi do ilustracji twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku

7-8 SPP T Z S



Fot. 98 Model z deski drewnianej do ilustracji twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku

7-8 SPP T Z S

Interaktywny model „Twierdzenie Pitagorasa” przedstawiony na fot. 99 pokazuje równoważność objętości prostopadłościanów o tej samej wysokości, zbudowanych na kwadratach opartych na przyprostokątnych i przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Uczeń, obracając model, sprawia, że płyn wypełniający prostopadłościan odpowiadający przeciwprostokątnej przepływa, napełniając dwa prostopadłościany odpowiadające przyprostokątnym.

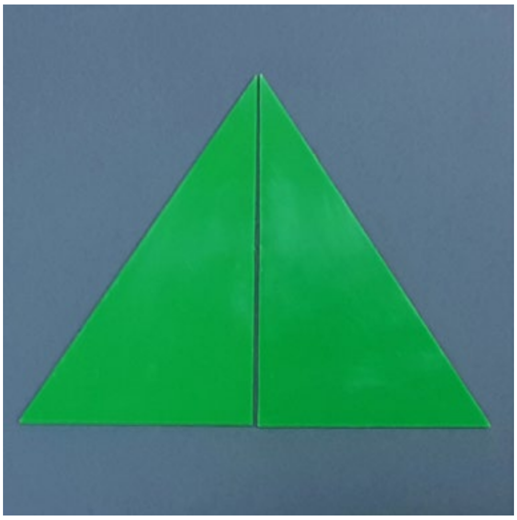
Fot. 99 Interaktywny model ilustrujący twierdzenie Pitagorasa

7-8 SPP T Z S

Miejsce na notatki

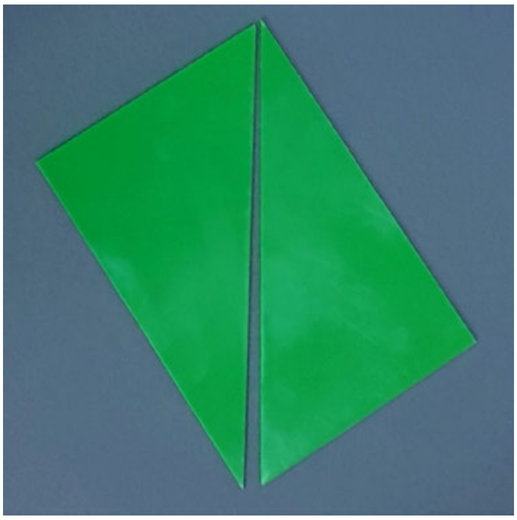
Modele do ilustracji równoważności pól figur płaskich

Jedną z dobrych dróg matematycznego poznania jest przechodzenie od szczegółu do ogółu, od konkretu do uogólnienia, od znanego do nowego. Podczas kształtowania pojęcia pola figury płaskiej naturalnie nawiązuje się do pola powierzchni prostokątnej działki (pola), ściany czy podłogi pomieszczenia. Wzór na pole prostokąta pojawia się w edukacji matematycznej wcześnie i nie stanowi dla uczniów większego problemu. Doskonałą metodą na ilustrowanie sposobów obliczania pól innych wielokątów jest ich „rozcinanie" i doprowadzanie do wielokąta, którego pole już znamy – prostokąta. Fot. 100–105 przedstawiają przykłady takich transformacji figur, których modele wykonane zostały z plastikowych płytek. Dotyczą kolejno: trójkąta równoramiennego (fot. 100–101), ostrokątnego (fot. 102–103) i rozwartokątnego (fot. 104–105).



Fot. 100 Równoważność pól wielokątów
(trójkąt równoramienny – prostokąt) I

4-6 | 7-8 | SPP | T | O | Z



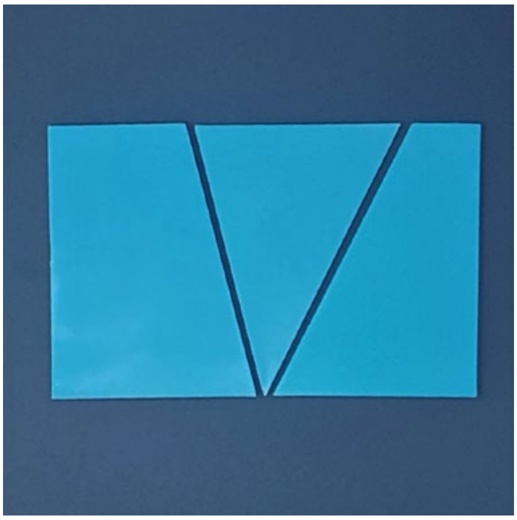
Fot. 101 Równoważność pól wielokątów
(trójkąt równoramienny – prostokąt) II

4-6 | 7-8 | SPP | T | O | Z

Cięcie równoległe do podstawy w przypadku niebieskiego trójkąta ostrokątnego (fot. 102–103) jest tak dopasowane, aby dzieliło wysokość tego trójkąta na połowy. Uczeń łatwo spostrzega, że odcięty trójkąt (po obróceniu) można wstawić w rozsunięte i połączone w odwrotnej kolejności powstałe w wyniku cięcia trapezy prostokątne. Otrzymuje tym samym prostokąt o boku równym podstawie wyjściowego trójkąta. Drugi bok tego prostokąta to połowa wysokości wyjściowego trójkąta.

Fot. 102 Równoważność pól wielokątów (trójkąt ostrokątny – prostokąt) III

4-6 7-8 SPP T O Z



Fot. 103 Równoważność pól wielokątów (trójkąt ostrokątny – prostokąt) IV

4-6 7-8 SPP T O Z

Podobny, co do zasady, podział trójkąta rozwartokątnego zastosowano w kolejnym modelu (fot. 104–105). Różnica polega na podziale czworokąta powstałego po odcięciu trójkąta wzdłuż linii równoległej do podstawy trójkąta w połowie wysokości na trapez prostokątny i trójkąt prostokątny. Z tych trzech figur łatwo utworzyć prostokąt.

Fot. 104 Równoważność pól wielokątów (trójkąt rozwartokątny – prostokąt) V

4-6 7-8 SPP T O Z

Fot. 105 Równoważność pól wielokątów (trójkąt rozwartokątny – prostokąt) VI

4-6 7-8 SPP T O Z

Kolejne fotografie pokazują równoważność pól trapezu i prostokąta (fot. 106–107).

Fot. 106 Równoważność pól wielokątów
(trapez – prostokąt) VII

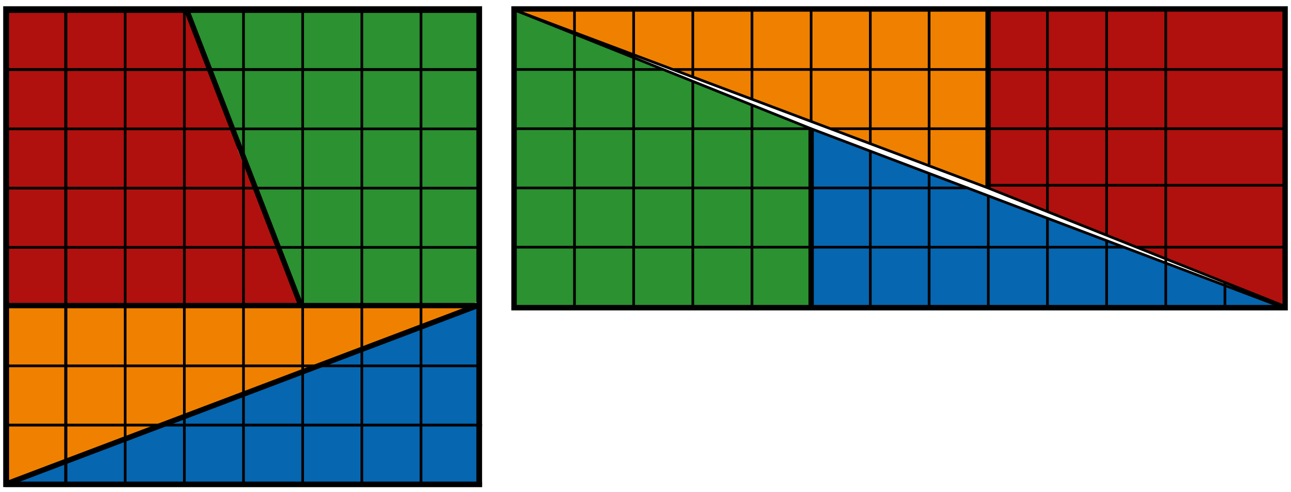
4-6 7-8 SPP T O Z

Fot. 107 Równoważność pól wielokątów
(trapez – prostokąt) VIII

4-6 7-8 SPP T O Z

Do układanek ilustrujących równoważności pól figur płaskich można wrócić w spiralnym ujęciu treści programowych przy omawianiu równoważności objętości brył czy zasady Cavalieriego na kółku matematycznym w klasach starszych.

Przedstawione modele można wykonać samodzielnie z kartonu, papieru, folii czy pleksi. Ważne, aby w starszych klasach nauczyciel nie poprzestał na układance i na tym, że „widać" transformację jednej figury w drugą. Rozumowanie, które uzasadnia równoważność, opiera się na porównaniu miar kątów (ich tangensów) otrzymanych części oraz stwierdzeniu odpowiednich kierunków. Zaniechanie takich rozważań może doprowadzić do błędu wnioskowania. Najbardziej spektakularnym przykładem takiego błędu jest wnioskowanie prowadzące do stwierdzenia, że 65=64, opisywane już przez Szczepana Jeleńskiego w „Lilavatti".



Rys. 1 Grafika prowokująca do myślenia krytycznego: „Czy 65=64?"

Modele do wspierania intuicji geometrycznych

Intuicje kształtów, pól i objętości rozwijają się od najmłodszych lat. Ich źródłem są doświadczenia związane z przelewaniem płynów (np. napełnianiem szklanek sokiem), przesypywaniem produktów sypkich (cukier, kasza, sól). Intuicje dotyczące kształtowania objętości prostopadłościanu, którego powierzchnia boczna zbudowana jest z przystających prostokątów, opisuje Emma Castelnuovo. Eksperyment pokazuje, jak skomplikowana jest droga do ukształtowania właściwych intuicji przestrzennych. Stosując postulaty tej badaczki, by z matematyki czynić użyteczne narzędzie dla nauki i działalności praktycznej, proponuję naukę brył obrotowych za pomocą ćwiczeń praktycznych na kole garncarskim (fot. 108–111) lub za pomocą zestawu do demonstracji figur obrotowych (fot. 112–115).

Fot. 108 Koło garncarskie, tworzenie bryły obrotowej. Pokaz nauczyciela

U S K P O

Fot. 109 Modele brył obrotowych wykonane przez uczniów z gliny na kole garncarskim

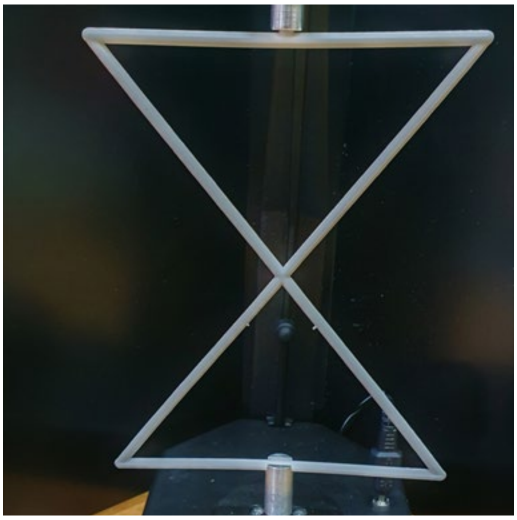
U S K P O

Fot. 110 Koło garncarskie, tworzenie stożka przez dziecko

U S K P O

Fot. 111 Koło garncarskie, tworzenie walca przez dziecko

U S K P O



Fot. 112 Ramka do zestawu do demonstracji figur obrotowych (dwa trójkąty)

4-6	7-8	SPP	S	K	P

Fot. 113 Ramka w ruchu obrotowym (2 stożki o wspólnym wierzchołku)

4-6	7-8	SPP	S	K	P

Fot. 114 Ramka do zestawu do demonstracji figur obrotowych (okrąg–trójkąt–okrąg)

4-6	7-8	SPP	S	K	P

Fot. 115 Ramka w ruchu obrotowym (kula–stożek–kula)

4-6	7-8	SPP	S	K	P

Intuicje związane z pojęciem powierzchni minimalnych i symetrii wspomagają doświadczenia polegające na zanurzaniu modeli żeberkowych w mydlinach (fot. 116).

Fot. 116 Model żeberkowy czworościanu po wyjęciu z mydlin

U S K P O

Fot. 117 Zestaw klocków do nauki ułamków

WP i 1-3 4-6 P Z

Rozumienie ułamków i procentów wspomaga zestaw drewnianych, oznakowanych klocków (fot. 117) lub jego wersja amatorska wykonana z ramki fotograficznej (fot. 118–119).

Fot. 118 Zestaw do nauki ułamków wykonany samodzielnie I (ramka)

WP i 1-3 4-6 P Z

Fot. 119 Zestaw do nauki ułamków wykonany samodzielnie II (ramka wraz z klockami)

WP i 1-3 4-6 P Z

Podsumowanie, czyli *rzut oka wstecz*

George Pólya etapy rozwiązywania matematycznego zadania zakończył tzw. *rzutem oka wstecz*. Rozwiązanie, jego zdaniem, nie będzie kompletne, jeśli nie sprawdzimy jego sensu, znaczenia, gdy nie poczynimy niezbędnych refleksji. Naśladując tę drogę, spójrzmy wstecz i odpowiedzmy na pytanie, dlaczego środki dydaktyczne są tak istotne, dlaczego warto je zbierać, samodzielnie wykonywać i ich używać?

1

Po pierwsze, aby zastosowanie środków przynosiło rzeczywiście pożytek, trzeba dawkować je tak jak lekarstwo. Nie za dużo, nie za mało. Dokładnie tyle, ile trzeba i wtedy, kiedy trzeba. Pragnę zwrócić uwagę na fakt, że „pomoc dydaktyczna" może stać się przeszkodą w przybliżeniu pojęcia czy w rozumowaniu. Jej rola nie polega na zastępowaniu, a na wspieraniu aktywności poznawczej ucznia.

Stosujmy środki w taki sposób, aby nie wyeksploatować konkretnych reprezentacji, tak, aby nie przytłumić pomysłowości i dociekliwości dziecka.

2

Po drugie, wybierane środki powinny być atrakcyjne dla ucznia. Atrakcyjność nie jest równoznaczna z wartością materialną. W konkretnej sytuacji, podczas omawiania symetrii, skutecznym i ciekawym środkiem dydaktycznym może być lusterko wyjęte z torebki. W innej – garść kasztanów, słomki do picia napojów czy samodzielnie przygotowane anaglify. Chodzi o to, aby trafić z użyciem środka we właściwy moment.

3

Po trzecie, stosowanie środków dydaktycznych ma być przyjemne i wygodne – również dla nauczyciela. Powinien mieć je *pod ręką*, dobrze zapakowane i oznakowane. Częste, nie okazjonalne, stosowanie środków dydaktycznych sprawi, że uczniowie będą się do nich stale odwoływać, a nawet samodzielnie je tworzyć.

Autorka serdecznie dziękuje za umożliwienie wykonania kilku fotografii zamieszczonych w skrypcie: Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie, Uniwersytetowi Szczecińskiemu, Politechnice Koszalińskiej, Szkole Podstawowej z Oddziałami Integracyjnymi im. Leonida Teligi w Pyrzycach oraz firmie Be Smart – Centrum Języków Obcych Effects.

Bibliografia

Bruner J. (2010). Kultura edukacji. Kraków: Universitas.

Bruner J. (1978). Poza dostarczone informacje, Warszawa: PWN.

Gruszczyk- Kolczyńska E., Zambrowska M. (2019). Klocki Dienesa. Przewodnik metodyczny. Epideixis.

Jeleński S. (1964). Lilavati. Warszawa: PZWS.

Komorowska-Zielony A. H. (2018). Wykorzystanie klocków w matematycznej edukacji przedszkolnej. Forum oświatowe 30, 2(60) 103-114.

Makiewicz M. (2018). Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej - badania w działaniu. Szczecin: SKNMDM US.

Piaget J., Inhelder B. (1967). Obrazy umysłowe W: J. Piaget, B. Inhelder, P. Greco, , P. Oleron (red.), Inteligencja (ss. 95-96). Warszawa: PWN.

Sośnicki K.(1959). Dydaktyka ogólna. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich.

Dr hab. Małgorzata Makiewicz, prof. APS, prof. US, mgr matematyki, dr nauk humanistycznych, dr hab. nauk społecznych w zakresie pedagogiki. Obecnie jest kierownikiem Katedry Pedagogiki Małego Dziecka Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie oraz profesorem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego. Posiada II stopień specjalizacji nauczycielskiej i tytuł nauczyciela dyplomowanego. Jest ekspertem MEiN w zakresie awansu zawodowego nauczycieli, a także członkiem Zarządu Oddziału Szczecińskiego i Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Autorka 7 książek i ponad 90 artykułów, redaktorka 3 monografii ww konferencji naukowych pod hasłem „Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura". Od 2010 roku kieruje Międzynarodowym Projektem Naukowo-Dydaktycznym *Mathematics in Focus*. Jest finalistką 16. edycji konkursu „Popularyzator Nauki" organizowanego przez MEiN i portal „Nauka w Polsce".

Zainteresowania badawcze: dydaktyka matematyki, kultura matematyczna, twórczość, uzdolnienia i zainteresowania matematyczne, fotoedukacja, propedeutyka edukacji matematycznej dziecka.

TEKST I ZDJĘCIA: dr hab. Małgorzata Makiewicz, prof. APS, prof. US

RECENZJA: dr Zdzisław Pogoda, prof. UJ

KOREKTA JĘZYKOWA: Małgorzata Radomska

ZDJĘCIE NA OKŁADCE: Shutterstock

PROJEKT I SKŁAD: Karolina Krämer

ISBN: 978-83-965091-0-9

Wydanie I
Warszawa, 2022

Fundacja

O pomocach dydaktycznych napisano wiele artykułów i opracowań. *Środek do celu. Jak wspomagać edukację matematyczną* Małgorzaty Makiewicz ma jednak charakter wyjątkowy, autorka dokonała bowiem uporządkowanego przeglądu takich środków. [...] Omówione są tu liczne przykłady, często z konkretnymi propozycjami zastosowania. Oprócz dobrze znanych środków, takich jak tangram, tablice, plansze do gier czy puzzle, pojawiają się bardziej oryginalne i mniej znane przykłady, jak piłka do nauki tabliczki mnożenia. [...] Czytelnik znajdzie także w publikacji ciekawe propozycje samodzielnego wykonania i zastosowania różnych pomocy.

Książkę Małgorzaty Makiewicz można polecić wszystkim zajmującym się edukacją matematyczną. Może być przydatna nauczycielom na wszystkich poziomach nauczania, studentom myślącym o zawodzie nauczyciela, a także wykładowcom akademickim, prowadzącym na przykład zajęcia z dydaktyki matematyki.

dr Zdzisław Pogoda
prof. Uniwersytetu Jagiellońskiego
Instytut Matematyki UJ